EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

28e JAARGANG 1952/53

VI

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contritbuite, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD.

AEQUIVALENTE VORMEN VAN HET PARALLELLENAXIOMA [1])

door

Dr L. N. H. Bunt.

Wanneer wij aequivalente vormen van het parallellenaxioma willen beschouwen, d.w.z. stellingen wier substitutie voor dit axioma geen verandering teweeg brengt in de verzameling van eigenschappen die bewezen kunnen worden, moeten wij ons eerst rekenschap geven van het geheel van de uitgangspunten van onze meetkundige redeneringen, van welk geheel het beschouwde postulaat immers slechts een deel is dat zijn uitwerking ontleent aan de samenwerking met de andere delen. Dit geheel van axioma's zal voor onze beschouwingen bestaan uit de bekende incidentie-, ordenings-, congruentie- en continuïteitsaxioma's. Afgezien van het spreken over het parallellenaxioma, zullen wij ons echter vrijwel niet met axiomatische kwesties inlaten, terwijl anderzijds de genoemde vier groepen van axioma's geen verdere bedoeling hebben dan een exacte grondslag te vormen van redeneringen in de (al of niet Euclidische) meetkunde waarbij gebruik wordt gemaakt van de aanschouwing, voor zover de laatste niet betrekking heeft op evenwijdigheid van lijnen. Wij kunnen daarom ons uitgangspunt eenvoudiger formuleren door vast te stellen, dat dit wordt gevormd door de eerste 27 proposities uit Boek I van de Elementen van Euclides met inbegrip van de stilzwijgende onderstellingen welke bij de bewijzen hiervan een rol spelen. In hoofdzaak omvatten deze 27 proposities de congruentiestellingen, de stellingen welke het verband tussen de grootte van de zijden en die van de hoeken van een driehoek tot uitdrukking brengen, enkele eenvoudige constructies als het overbrengen en middendoor delen van een hoek en het construeren van een loodlijn, en de stelling welke voor onze uiteenzettingen de belangrijkste zal zijn, nl. die van de buitenhoek. Deze luidt: een buitenhoek van een driehoek is groter dan elk der niet-aanliggende binnenhoeken. Het oneindig lang zijn van een

[1]) Voordracht ter gelegenheid van het Symposion van het Wiskundig Genootschap op 23 December 1952 te Utrecht.

rechte is één van de zoëven bedoelde stilzwijgende onderstellingen, en wel één die niet gemist kan worden voor het bewijs van de stelling van de buitenhoek. Bij een strenge axiomatische opzet is deze onderstelling een gevolg van de ordeningsaxioma's, en er zal bij enkele van onze redeneringen opnieuw gebruik van worden gemaakt. Een tweede stilzwijgende onderstelling, welke we in verband met hetgeen volgt met name willen noemen, wordt gevormd door het axioma van Pasch, volgens hetwelk een rechte die een der zijden van een driehoek snijdt en niet door een hoekpunt gaat, nog minstens één andere zijde snijdt. Een derde onderstelling tenslotte, welke in dezelfde categorie thuis hoort als de twee genoemde, zij het dat deze onderstelling bij Euclides niet als stilzwijgend mag worden aangeduid, is het axioma van Eudoxus (of Archimedes), betrekking hebbend op twee grootheden van dezelfde soort en verschillende grootte en volgens hetwelk de grootste door een geheel aantal malen de kleinste kan worden overtroffen.

Allereerst kan nu op grond van dit geheel van al of niet uitdrukkelijk geformuleerde eigenschappen worden aangetoond, dat, bij snijding van twee rechten door een derde, het gelijk zijn van twee overeenkomstige hoeken een voldoende voorwaarde voor evenwijdigheid is. Dit is nl. een onmiddellijk gevolg van de stelling van de buitenhoek. Dat de genoemde voorwaarde tevens noodzakelijk is, kan niet worden bewezen en wordt door Euclides in het vijfde postulaat ongeveer aldus geformuleerd:

1. **Als een rechte, die twee rechten treft, de binnenhoeken aan dezelfde kant kleiner dan twee rechte hoeken maakt, zullen die twee rechten elkaar snijden aan de kant van die binnenhoeken.**

Ik zal dit de eerste vorm van het parallellenaxioma noemen en tot deze eerste vorm tevens die formuleringen rekenen welke slechts in zoverre van die van Euclides verschillen, dat in plaats van binnenhoeken andere hoeken worden genoemd.

Onder de tweede vorm van dit axioma zullen we die formuleringen samenvatten welke de logische omkeringen zijn van de tot vorm 1 behorende formuleringen, zoals:

2. **Bij snijding van twee evenwijdige rechten door een derde zijn overeenkomstige hoeken gelijk.**

De derde vorm waarin men het axioma aantreft, luidt:

3. **Door een punt buiten een lijn gaat hoogstens één lijn welke met de eerste evenwijdig is.**

De formulering volgens welke er „slechts" één lijn gaat enz. bevat een overbodig element, omdat het bestaan van minstens één parallel kan worden aangetoond door deze te construeren onder gebruikmaking van het voldoende zijn van de voorwaarde van gelijke overeenkomstige hoeken.

Onmiddellijk na het vermelden van het parallellenaxioma in één van de genoemde drie vormen worden in de schoolboeken meestal een tweetal stellingen genoemd en bewezen, die we als resp. de vierde en vijfde vorm van dit axioma kunnen beschouwen, nl.:

4. **Als een rechte één van twee evenwijdige lijnen snijdt, snijdt hij ook de andere,** en

5. **Als twee rechten evenwijdig zijn met eenzelfde rechte, zijn zij onderling evenwijdig.**

De aequivalentie van deze eerste vijf vormen van het parallellenaxioma is al heel eenvoudig aan te tonen en bevat voor een wiskundige dan ook weinig verrassends. Zo merkten wij reeds op, dat vorm 2 niets anders is dan de logische omkering van vorm 1, terwijl bijv. tussen 3 en 5 nauwelijks meer dan een grammaticaal onderscheid bestaat. Dit betekent evenwel niet, dat onze leerlingen dit inzicht zonder moeite deelachtig worden; integendeel, het subtiel-logische karakter van de redeneringen die deze aequivalentie aantonen, is oorzaak, dat deze beschouwingen volmaakt ongeschikt zijn voor de laagste klas van de middelbare school en nog altijd moeilijk voor de hoogste. Naar onze mening echter niet te moeilijk, en het moet ons verwonderen, dat dit gedeelte van de fundamenten van de meetkunde, waarvan het onderwijs in de eerste klas, bij alle goede bedoelingen, de leerlingen toch slechts een vage notie kan geven, niet een verplicht onderdeel van de leerstof van de hoogste klassen vormt. Hier moest tijd kunnen worden vrij gemaakt voor een nadere bespreking van de logische begrippen en redeneervormen welke de leerlingen bij hun studie van de vlakke meetkunde hebben gehanteerd en toegepast. Eén van deze begrippen is het eerder genoemde begrip van de logische omkering van een stelling en er zou op gewezen kunnen worden, dat niet alleen de huidige leerlingen, maar ook zelfs de Griekse wiskundigen uit de tijd van Euclides een neiging aan de dag leggen om van het gelijkwaardig zijn van een stelling met haar logische omkering niet het volle profijt te trekken. En wat het geringe onderscheid tussen de vormen 3 en 5 van het parallellenpostulaat betreft, het zou een uitstekende oefening voor oudere leerlingen zijn om de eigenschap: „als twee rechten evenwijdig zijn met eenzelfde rechte, zijn zij onderling

evenwijdig", via de formuleringen: „als twee rechten evenwijdig zijn met eenzelfde rechte, gaan zij niet door één punt", „geen twee rechten, evenwijdig met eenzelfde rechte, gaan door één punt" en „door een punt gaan geen twee rechten, evenwijdig met eenzelfde rechte" over te voeren in de eigenschap „door een punt gaat hoogstens één rechte, evenwijdig met een gegeven rechte".

Wij willen evenwel afzien van een bespreking van de hierin opgesloten mogelijkheden, ten einde thans te komen tot meer interessante aequivalente vormen van het vijfde postulaat. Ik denk hierbij aan de U allen als aequivalent welbekende vormen als: „in een driehoek is de som der hoeken 180°", „door drie punten die niet op één rechte liggen, gaat een cirkel", „er bestaan gelijkvormige driehoeken van verschillende grootte". Vooraf een opmerking over een redeneerwijze, die we niet zullen toepassen. We merkten reeds op, dat we uitgaan van de onderstelling, dat een rechte lijn oneindig lang is. Zoals we aanstonds zullen zien, wordt de mogelijkheid van een elliptische meetkunde hierdoor uitgesloten. We hebben dus nog slechts de keus tussen een euclidische en een hyperbolische meetkunde. Wanneer nu op grond van zekere overwegingen, welke niet van elementair-meetkundige aard zijn, van een bepaalde stelling uit de euclidische meetkunde bekend is, dat deze in de hyperbolische meetkunde niet geldt, kan men zonder meer zeggen, dat die stelling aequivalent is met het parallellenaxioma. Immers, geldt het parallellenaxioma, en zijn we dus in de euclidische meetkunde, dan is de stelling waar; is omgekeerd de stelling waar, dan zijn we niet in de hyperbolische meetkunde, dus wèl in de euclidische, en dus geldt het parallellenaxioma. Zoals gezegd, zullen we deze bewijsmethode niet toepassen. Integendeel, we zullen geen gebruik maken van bekende feiten uit de hyperbolische meetkunde, maar we zullen op elementair-meetkundige manier de aequivalentie bewijzen van het axioma van Euclides met de reeds genoemde en met enkele andere stellingen. Voor velen Uwer zullen sommige redeneringen een bekend karakter dragen omdat het grootste deel van onze bewijzen verspreid voorkomt, in expliciete of impliciete vorm, in werken over de niet-euclidische meetkunde. De enige verdienste van hetgeen volgt is, dat wij die bewijzen met enkele zullen aanvullen en tot een min of meer volledig geheel samenvatten.

Ik zal nu achtereenvolgens enige stellingen aangeven welke met het vijfde postulaat gelijkwaardig zijn, met één of soms twee bewijzen van die gelijkwaardigheid. Een bewijs zal slechts in één richting worden gegeven, nl. die, waarin wordt aangetoond, dat de

geldigheid van het parallellenaxioma uit die van de stelling volgt. Bij sommige bewijzen hebben we een of meer hulpstellingen nodig, die we zullen noemen wanneer ze een rol gaan spelen. De nummers zullen steeds één van de aequivalente vormen van ons axioma aanduiden.

Hulpstelling A. Als in vierhoek ABCD de zijden AD en BC gelijk en de hoeken A en B recht zijn, is $\angle C = \angle D$.
Bewijs (fig. 1): Verbind het midden M van AB met C en D.

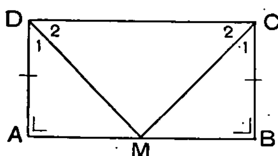


Fig. 1.

Uit de congruentie van de $\triangle\triangle$ DAM en CBM volgt: $\angle D_1 = \angle C_1$ en $MD = MC$. Dus is ook $\angle D_2 = \angle C_2$ en $\angle D_{1,2} = \angle C_{1,2}$

6. **De som van de hoeken van een driehoek is 180°.**
Eerste bewijs. We tonen aan: uit 6 volgt 1.
Gegeven (fig. 2): Eigenschap 6 en $\angle A_{1,2} + \angle S < 180°$.

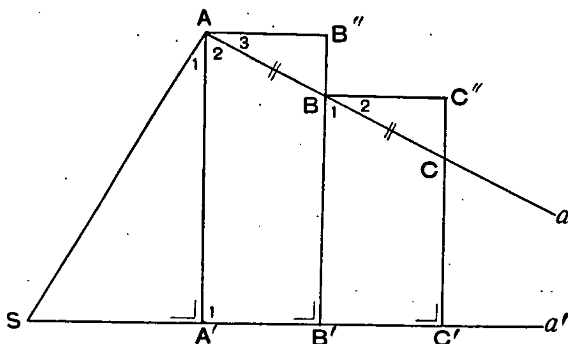


Fig. 2.

Te bewijzen: a snijdt a'.
Bewijs: Neem $AB = BC =$ enz. en trek AA', BB', CC', enz. loodrecht a'. Neem $B''B' = AA'$, $C''C' = BB'$, enz.
Uit het eerste deel van het gegeven volgt:
$\angle A_2 + \angle A_1' = \angle A_{1,2} + \angle S$. In verband met het tweede deel is dus $\angle A_2 + \angle A_1' < 180°$. Dus is $\angle A_2 < 90°$.
Uit 6 volgt, dat in vierhoek $A'B'B''A$ de som van de hoeken 360°

is. Wegens hulpstelling A is dus $\angle A_{2,3} = \angle B'' = 90°$, terwijl op grond van $\angle A_2 < 90°$ het punt B tussen B' en B'' ligt. Analoog voor $\angle C''$. Dus is $\angle B'' = \angle C''$.
De som van de hoeken van vierhoek $A'B'BA$ is 360°, dus $\angle B_1 = \angle A_2$, waaruit volgt $\angle B_2 = \angle A_3$. Uit de congruentie van de $\triangle\triangle$ $AB''B$ en $BC''C$ volgt $B''B = C''C$, dus $CC' = BB' - C''C = AA' - 2 . B''B$.
Zo voortgaande vindt men na n maal het stuk AB op a te hebben afgepast, dat de afstand van het laatstverkregen eindpunt tot a' gelijk is aan $AA' - n . B''B$. Kiest men n zo groot, dat $(n - 1) . B''B < AA'$ en $n . B''B. \geqq AA'$ is (dit kan volgens het axioma van Eudoxus; volgende toepassingen van dit axioma zullen wij niet meer uitdrukkelijk aangeven), dan ligt het eindpunt van het n^e stuk op a' of aan de andere kant van a' dan A. In beide gevallen snijden a en a' elkaar.

Hulpstelling B. Uit 6 *volgt: door een punt P buiten een rechte a kan men een lijn trekken die a onder een willekeurig kleine hoek α snijdt.*
Bewijs (fig. 3): Trek $PA_1 \perp a$, en neem achtereenvolgens $A_1A_2 = PA_1$,

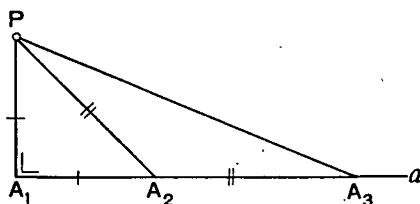


Fig. 3.

$A_2A_3 = PA_2$, $A_3A_4 = PA_3$, enz.

Uit 6 volgt: $\angle PA_nA_1 = \dfrac{\pi}{2^n}$. Door n voldoende groot te kiezen, wordt $\angle PA_nA_1$ kleiner dan $\angle \alpha$.
Tweede bewijs van de aequivalentie van 6. We tonen aan: uit 6 volgt 3.

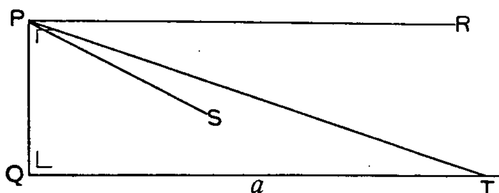


Fig. 4.

Bewijs (fig. 4): Trek $PQ \perp a$ en $PR \perp PQ$. Dan is $PR \parallel a$.

Beschouw een andere lijn, PS, welke door P gaat. Zonder de algemeenheid te schaden, mogen we onderstellen, dat de halve rechte PS binnen $\angle RPQ$ ligt.
Volgens hulpstelling B gaat door P een rechte, welke a in een punt T zodanig snijdt, dat $\angle PTQ < \angle SPR$ is. Omdat volgens 6 in $\triangle PQT$ $\angle P + \angle T = 90°$ is, is $\angle TPR = \angle PTQ$.
Dus is $\angle TPR < \angle SPR$, zodat PS binnen $\angle QPT$ ligt. Als gevolg van het axioma van Pasch zal a door PS worden gesneden.
PR is dus de enige rechte door P, evenwijdig a.

7. **Door drie punten welke niet op één rechte liggen, gaat een cirkel.**

Eerste bewijs (fig. 5). We tonen aan: uit 7 volgt 3.

Fig. 5.

Bewijs: Zij P een punt buiten a. We beschouwen twee rechten door P, nl. PQ en PR. Richt in P op PQ een loodlijn PA op en bepaal de spiegelbeelden A_1, A_2 en A_3 van A t.o.v. a, PQ en PR. Dan ligt minstens één van de punten A_2 en A_3 niet op het verlengde van A_1A. Laat dit het punt A_3 zijn. Volgens 7 gaat door de punten A_1, A en A_3 een cirkel. De middelloodlijnen a en PR van A_1A en AA_3 snijden elkaar dus.
Hieruit volgt, dat van elke twee rechten door P minstens één de lijn a snijdt.

Tweede bewijs (fig. 6). We tonen aan: uit het niet geldig zijn van 3 volgt het niet geldig zijn van 7.
Bewijs: Laat P een punt en a een rechte zijn met de eigenschap, dat door P meer dan één lijn gaat, evenwijdig met a. Onder deze rechten zal minstens één lijn b voorkomen, die een scherpe hoek maakt met de loodlijn PQ (Q is het spiegelbeeld van P t.o.v. a).

Duiden we met a_1 en Q_1 de spiegelbeelden aan van a en Q t.o.v. b, dan zullen a en a_1 elkaar niet snijden. Door de punten Q, P en Q_1, welke niet op één rechte liggen, gaat dus geen cirkel.

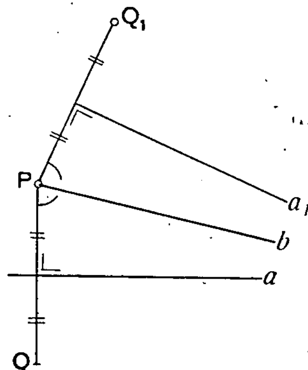


Fig. 6.

Hulpstelling C. De som van de hoeken van een driehoek is niet groter dan 180°.

Bewijs (fig. 7): Dat de som van twee hoeken niet groter is dan 180°, is een onmiddellijk gevolg van de stelling van de buitenhoek.

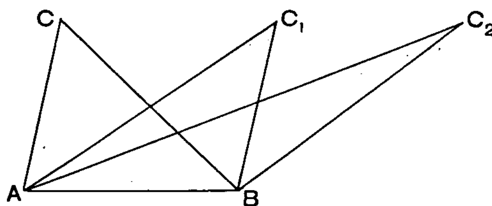


Fig. 7.

Stel, dat in $\triangle ABC$ de som van de drie hoeken gelijk is aan $180° + \varphi$. Zij AC_1 de met zichzelf verlengde zwaartelijn vanuit A. We onderstellen, dat $\angle C_1AB$ niet groter is dan $\frac{1}{2}\angle A$, en trekken AC_2, de met zichzelf verlengde zwaartelijn van $\triangle ABC_1$ vanuit A. (Indien $\angle C_1AB$ groter is dan $\frac{1}{2}\angle A$, is $\angle C_1$, die gelijk is aan $\angle CAC_1$, kleiner dan $\frac{1}{2}\angle A$ en verwisselen we de letters A en C_1.) We onderstellen, dat $\angle C_2AB$ niet groter is dan $\frac{1}{4}\angle A$, en trekken AC_3, de met zichzelf verlengde zwaartelijn van $\triangle ABC_2$ vanuit A. (In het andere geval verwisselen we de letters A en C_2.) Zo doorgaande verkrijgen we een reeks $\triangle\triangle\ ABC$, ABC_1, ABC_2, enz., die elk $180° + \varphi$ tot som van de hoeken hebben. In $\triangle ABC_n$ is

echter $\angle A$ hoogstens gelijk aan $\frac{1}{2^n} \angle A$, welk bedrag kleiner dan φ wordt voor voldoend grote waarden van n. In deze driehoek zou dan de som van de andere 2 hoeken groter zijn dan 180°, welke mogelijkheid reeds werd uitgesloten. Onze onderstelling, dat de som van de hoeken van $\triangle ABC$ groter is dan 180°, voert dus tot een ongerijmdheid.

We merken op, dat in het bewijs van hulpstelling C één van de in het begin genoemde onderstellingen een belangrijke rol heeft gespeeld, nl. die van het oneindig lang zijn van een rechte, en dat door deze hulpstelling de mogelijkheid van een elliptische meetkunde wordt uitgesloten.

8. **Is $\angle$ A kleiner dan 60°, dan kan door ieder punt binnen $\angle$ A een rechte worden getrokken die de benen van $\angle$ A snijdt.**
We tonen aan: uit 8 volgt 6.
Bewijs (fig. 8): We beschouwen een willekeurige $\triangle ABC$. Gesteld, de som van de hoeken is kleiner dan 180°, en wel gelijk aan $180° - \varphi$. Dan is bijv. $\angle A$ kleiner dan 60°.

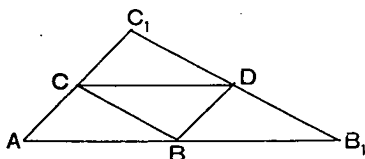


Fig. 8

Construeer $\triangle DCB \cong \triangle ABC$ en trek B_1C_1 door D. De som van de hoeken van $\triangle DCB$ is $180° - \varphi$. Volgens hulpstelling B is in elk van de $\triangle\triangle$ BB_1D en CDC_1 de som van de hoeken niet groter dan 180°. Dus is in $\triangle AB_1C_1$ de som van de hoeken niet groter dan $(4.180° - 2\varphi) - 3.180° = 180° - 2\varphi$. Handelen we vervolgens met $\triangle AB_1C_1$ op dezelfde manier als met $\triangle ABC$, dan ontstaat een driehoek AB_2C_2, waarin de som van de hoeken hoogstens $180° - 2^2 . \varphi$ bedraagt. Aldus voortgaande verkrijgen we na n stappen een driehoek AB_nC_n, waarin de som van de hoeken gelijk is aan $180° - 2^n . \varphi$. Door n voldoende groot te nemen, zouden we een driehoek verkrijgen, waarin de som van de hoeken negatief is, wat onmogelijk is.

De som van de hoeken van een driehoek is dus niet kleiner dan 180°. Aangezien zij volgens hulpstelling C evenmin groter dan 180° is, is zij gelijk aan 180°.

We zullen nu achtereenvolgens een verscherping bespreken van de formuleringen 3, 6 en 8. We beginnen met formulering 3 en zullen aantonen, dat de hierin vervatte voorwaarde kan worden vervangen door een andere welke aanzienlijk minder veeleisend is, nl.

9. **Er bestaan een lijn a en een punt P met de eigenschap, dat door P hoogstens één lijn gaat, evenwijdig met a.**

We zullen aantonen: uit 9 volgt 3.

Bewijs: Zij d de afstand van P tot a. We beschouwen een willekeurig punt P' en een willekeurige lijn a' met afstand d', en bewijzen achtereenvolgens in de gevallen $d' = d$, $d' < d$ en $d' > d$, dat door P' niet meer dan één lijn, evenwijdig a', gaat.

a) $d' = d$ (fig. 9).

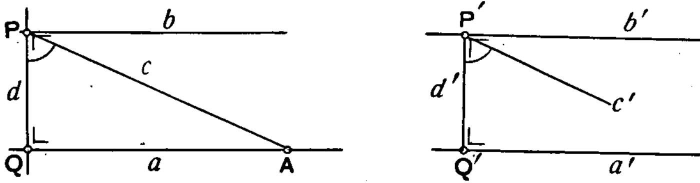


Fig. 9.

$PQ \perp a$ en $P'Q' \perp a'$. Trek b door P en b' door P', resp. loodrecht op PQ en $P'Q'$. Dan is $b \parallel a$ en $b' \parallel a'$. Zij c' een rechte door P', welke met $P'Q'$ een scherpe hoek maakt. Door P gaat een rechte c welke met PQ een even grote hoek maakt. Volgens het ondersteld snijdt c de lijn a in een punt A. Pas op a' aan de kant van c' een stuk $Q'A' = QA$ af. Uit de congruentie van de driehoeken PQA en $P'Q'A'$ volgt, dat c' met $P'A'$ samenvalt en dus a' snijdt. De lijn b' is dus de enige rechte door P', evenwijdig a'.

b) $d' < d$ (fig. 10).

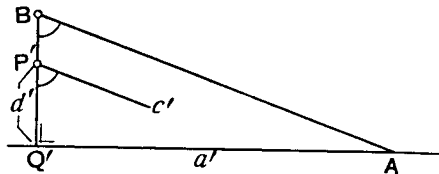


Fig. 10.

Zij c' weer een rechte door P', welke met $P'Q'$ een scherpe hoek

maakt. Neem $BQ' = d$ en trek door B, aan dezelfde kant van BQ' als waar c' ligt, een rechte welke met BQ' een even grote hoek maakt. Volgens a) snijdt deze rechte de lijn a' in een punt A. Uit $c' // BA$ volgt, in verband met het axioma van Pasch, dat c' de zijde $Q'A$ van $\triangle Q'AB$, dus de lijn a', snijdt. Door P' gaat dus hoogstens één rechte, evenwijdig a'.

c) $d' > d$.

We maken eerst de volgende drie opmerkingen.

c_1) (fig. 11). Is de afstand P'Q' van P' tot a' gelijk aan d, en is

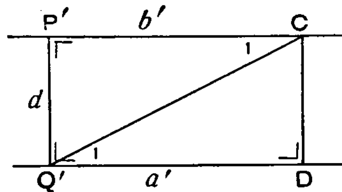


Fig. 11.

$b' \perp P'Q'$, dan is niet alleen b' de enige rechte door P', evenwijdig a', maar op grond van het onder a) bewezene is tevens a' de enige rechte door Q', evenwijdig met b'.

c_2) (fig. 11). Kies op b' een punt C en laat de loodlijn CD neer op a'. Omdat (volgens c_1) a' de enige rechte door Q', evenwijdig b' is, terwijl deze rechte geconstrueerd zou kunnen worden door de verwisselende binnenhoeken bij Q' en C even groot te nemen, is $\angle Q_1' = \angle C_1$. Dus is $\triangle Q'DC \cong \triangle CP'Q'$, waaruit volgt: $CD = P'Q' = d$. Op grond van a) is dus b' de enige rechte door C, evenwijdig met a'.

c_3) Laat in fig. 12 de afstand $P'Q'$ van P' tot a' gelijk $2d$ zijn.

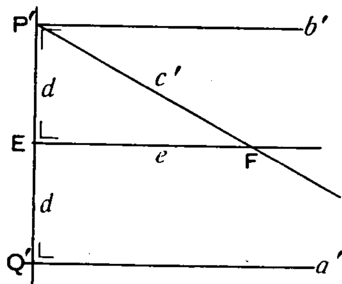


Fig. 12.

Is E het midden van $P'Q'$ en staan b' en e loodrecht op $P'Q'$, dan is volgens a) de lijn b' de enige rechte door P', evenwijdig e. Een rechte c' door P', welke met $P'Q'$ een scherpe hoek maakt, zal e

dus snijden in een punt F. Volgens c_2) is e de enige rechte door F, evenwijdig met a'. Hieruit volgt, dat c' de lijn a' snijdt, waarmee is aangetoond, dat door P' niet meer dan één rechte gaat, evenwijdig met a'. — Door deze redenering te herhalen, kunnen we bewijzen, dat in het geval $d' = n \,.\, d$ door P' slechts één rechte, evenwijdig a', gaat.
Ten slotte het algemene geval $d' > d$. Kies n zo groot, dat $d' < n \,.\, d$ is, en bepaal op het verlengde van $Q'P'$ een punt B, zodanig dat $Q'B = n \,.\, d$ is. Door toepassing van c_3) en van de onder b) gehouden redenering blijkt, dat ook in dit geval door P' niet meer dan één rechte gaat, evenwijdig met a'.

Vervolgens bewijzen we, dat formulering 6 door de volgende kan worden vervangen.
10. **Er bestaat een △ ABC, waarin de som van de hoeken 180° is.**

Hulpstelling D. Wanneer de som van de hoeken van een driehoek 180° *is, geldt dit ook voor elk der driehoeken waarin de eerste wordt verdeeld door een rechte door een der hoekpunten.*
Bewijs (fig. 13): Zij ABC een driehoek waarin de som van de hoeken

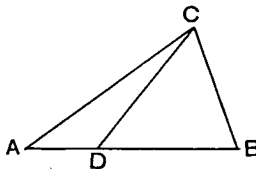


Fig. 13.

180° is en zij D een punt van AB. In de △△ CAD en CBD tezamen is de som van de hoeken 360°. Was nu in één van deze driehoeken de som van de hoeken kleiner dan 180°, dan was in de andere de som van de hoeken groter dan 180°, wat niet kan volgens hulpstelling B. In elk van de driehoeken is de som van de hoeken dus 180°.

Hulpstelling E. Uit 10 *volgt: er bestaat een rechthoekige driehoek met willekeurig grote rechthoekszijden en waarin de som van de hoeken* 180° *is.*
Bewijs (fig. 14): Trek $CD \perp AB$ en neem $DE = CD$. Volgens hulpstelling D is de som van de hoeken van △ CDE gelijk aan 180°. Elk van de scherpe hoeken van deze driehoek is dus 45°, zodat vierhoek $DEFC$, welke ontstaat door verdubbeling van

$\triangle$ *CDE*, een vierkant is. Door vier van deze vierkanten in de vorm van een nieuw vierkant tegen elkaar te plaatsen en dit proces

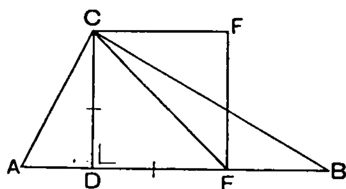


Fig. 14.

voort te zetten, kan men een vierkant met een willekeurig grote zijde construeren, en door hierin een diagonaal te trekken een rechthoekige driehoek met willekeurig grote rechthoekszijden en waarin de som van de hoeken 180° is.

Bewijs van de aequivalentie van vorm 10.
We tonen aan: uit 10 volgt 6 (fig. 15).

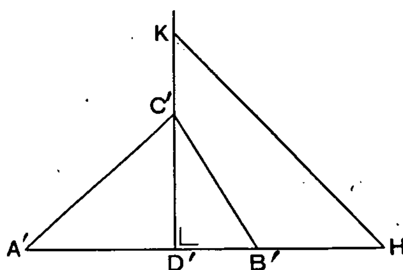


Fig. 15.

Bewijs: Zij $A'B'C'$ een willekeurige driehoek. Trek $C'D' \perp A'B'$. Volgens hulpstelling E is het mogelijk een rechthoekige driehoek $KD'H$ te construeren waarin de som van de hoeken 180° is en wel zo, dat C' op $D'K$ en B' op $D'H$ ligt. Uit hulpstelling D volgt, dat de som van de hoeken van $\triangle\, C'D'B'$ 180° bedraagt. Aangezien dit ook het geval is in $\triangle\, C'D'A'$, is de som van de hoeken van $\triangle\, A'B'C'$ eveneens 180°.

Opmerking. We hebben de aequivalentie van 9 bewezen, voorafgaande aan het bewijs van die van 10, en dus ook zonder van laatstgenoemde aequivalentie gebruik te maken. Hierdoor werd een zekere eenheid van methode gehandhaafd. Het ligt echter voor de hand, dat het in vele gevallen mogelijk is kortere bewijzen te leveren door van de aequivalentie van andere vormen van het parallellenaxioma gebruik te maken; men dient er slechts tegen

te waken, dat men een cirkelredenering toepast. Zo kan men als volgt op eenvoudige manier laten zien, dat de aequivalentie van 9 uit die van 10 voortvloeit (fig. 16).

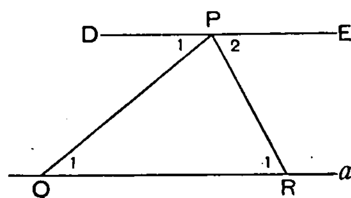


Fig. 16.

Laat P en a het punt en de rechte zijn, welke de eigenschap hebben, dat door P slechts één rechte evenwijdig a gaat. Verbind P met de punten Q en R van a, en maak de hoeken P_1 en P_2 resp. gelijk aan de hoeken Q_1 en R_1. Dan zijn PD en PE beide // a en vallen volgens onderstelling dus samen. In $\triangle PQR$ is dus de som van de hoeken 180°. Volgens 10 geldt dan het parallellenaxioma.

Vorm 8 kan thans worden verscherpt tot de volgende vorm:

11. **Er bestaat een hoek met de eigenschap, dat door ieder punt er binnen een rechte gaat welke de benen snijdt.**

Bewijs: Door een redenering als bij vorm 8 bewijst men, dat in een driehoek met de in 11 genoemde hoek als een der hoeken de som van de hoeken 180° is. Verder toepassing van 10.

12. **Ee bestaat een vierhoek waarin de som van de hoeken 360° is.**

Deze vorm is een direct gevolg van 10, zoals blijkt door het trekken van een diagonaal en toepassing van hulpstelling C.

De onderstelling van het bestaan van aequidistante rechten heeft in de geschiedenis van de euclidische en de niet-euclidische meetkunde een belangrijke rol gespeeld. De volgende drie vormen van het parallellenpostulaat hebben hierop betrekking.

13. **Er bestaan twee rechten a en b die overal even ver van elkaar verwijderd zijn.**

We tonen aan: uit 13 volgt 12.

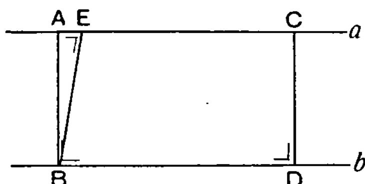


Fig. 17.

Bewijs (fig. 17): Trek de loodlijnen AB en CD op b en BE op a. Volgens het onderstelde zijn deze gelijk. Hieruit volgt: $\angle A = 90°$. Evenzo is $\angle C = 90°$. Er bestaat dus een vierhoek, nl. $ABDC$, waarin de som van de hoeken 360° is.

Hulpstelling F. Als in een vierhoek ABCD de zijden AD en BC gelijk en de hoeken A en B recht zijn, staat de verbindingslijn van de middens van de zijden AB en CD loodrecht op deze zijden.
Bewijs (fig. 18): Uit de congruentie van de $\triangle\triangle$ DAM en CBM

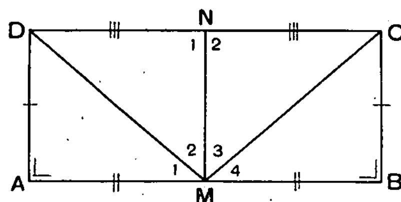


Fig. 18.

volgt: $MD = MC$ en $\angle M_1 = \angle M_4$. Dus is $\triangle MND \cong \triangle MNC$, waaruit volgt: $\angle N_1 = \angle N_2 = 90°$ en $\angle M_2 = \angle M_3$. Hieruit volgt $\angle M_{1,2} = \angle M_{3,4} = 90°$.

De vormen 14 en 15 zijn verscherpingen van 13.

14. **Er bestaan twee rechten a en b zodanig, dat de punten A, B en C van a even ver van b verwijderd zijn.**
We tonen aan: uit 14 volgt 12.

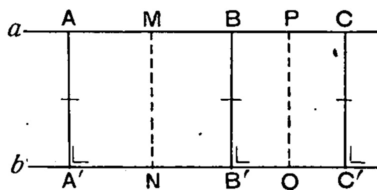


Fig. 19.

Bewijs (fig. 19): Laat AA', BB' en CC' loodrecht b zijn. Dan is $AA' = BB' = CC'$. Zijn M, N, P en Q opv. de middens van AB, $A'B'$, BC en $B'C'$, dan zijn volgens hulpstelling F de rechten MN en PQ loodrecht a en b. Er bestaat dus een vierhoek, nl. $MNQP$, waarin de som van de hoeken 360° is.

15. **Er bestaan twee rechten a en b met op a de punten A en B en op b het punt C zodanig, dat de afstanden van A en B tot b gelijk zijn aan de afstand van C tot a.**
We tonen aan: uit 15 volgt 12.

Bewijs (fig. 20): Volgens hulpstelling A is $\angle A_1 = \angle B_{1,2}$. Uit de congruentie van de $\triangle\triangle$ $CC'B$ en $BB'C$ volgt: $\angle B_{1,2} = \angle C_{2,3}$. Dus is $\angle A_1 = \angle C_{2,3}$. Hieruit volgt, dat in vierhoek $AA'CC'$ de som van de hoeken 360° is.

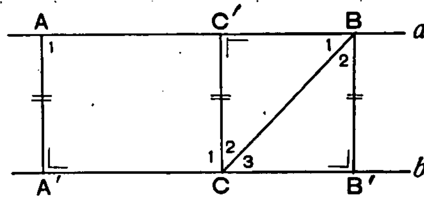


Fig. 20.

Ten einde de volgende vorm van het vijfde postulaat te kunnen formuleren, zijn we genoodzaakt een definitie van gelijkvormigheid van driehoeken te geven die afwijkt van de definitie welke veelal in moderne Nederlandse leerboeken wordt gegeven en op vermenigvuldiging van figuren berust.
Definitie. Onder gelijkvormige driehoeken verstaat men driehoeken, waarbij de hoeken van de ene gelijk zijn aan die van de andere.

16. **Er bestaan niet-congruente gelijkvormige driehoeken.**
We tonen aan: uit 16 volgt 12.
Bewijs (fig. 21): Laat gegeven zijn: $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$, met $AC > DF$.

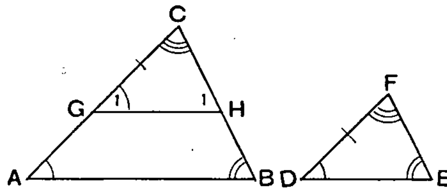


Fig. 21.

Neem $CG = FD$ en trek GH zo, dat $\angle G_1 = \angle D$ is. Dan is $GH \parallel AB$ zodat, volgens het axioma van Pasch, het snijpunt H met de rechte BC tussen B en C ligt. Uit de congruentie van de $\triangle\triangle$ GHC en DEF volgt: $\angle H_1 = \angle E = \angle B$. Wegens $\angle G_1 = \angle A$ en $\angle H_1 = \angle B$ is dan in vierhoek $ABHG$ de som van de hoeken 360°.

De aequivalentie van het vijfde postulaat met de thans volgende stelling is een gevolg van die van 16. We zullen het bewijs echter niet volledig geven, omdat ons dit wat ver in de hyperbolische meetkunde zou voeren.

Vooraf een definitie van het begrip „absolute eenheid".
Definitie. Onder een absolute eenheid verstaat men een eenheid welke uitsluitend met behulp van de axioma's is gedefinieerd.

17. **Er bestaat geen absolute eenheid van lengte.**
Bewijs van de aequivalentie van 17.
In de euclidische meetkunde bestaat wel een absolute eenheid van hoekmaat, nl. de hoek die gelijk is aan zijn nevenhoek, maar er bestaat niet een absolute eenheid van lengte. Omgekeerd, wanneer het parallellenaxioma niet geldt, kan men als volgt een eenheid van lengte definiëren. Omdat in dit geval 16 niet geldt, bestaan er geen gelijkzijdige driehoeken van verschillende grootte die gelijkvormig zijn. Dit betekent, dat wanneer van de gelijkzijdige $\triangle\triangle ABC$ en DEF geldt: $AB \neq DE$, de hoeken A en D verschillende grootte hebben. Stelt men dus voor $\angle A$, uitsluitend met behulp van de axioma's, een zekere grootte α vast en denkt men zich een gelijkzijdige driehoek geconstrueerd waarvan de hoeken gelijk α zijn, dan staat de lengte van de zijde eveneens vast en kan als eenheid van lengte worden gekozen.

Het ligt voor de hand, dat van nog vele andere van de bekende stellingen uit de schoolmeetkunde de aequivalentie met het parallellenpostulaat kan worden aangetoond. Zo noemen we nog de volgende twee, waarvan de gelijkwaardigheid op eenvoudige manier kan worden aangetoond, maar waarbij we het bewijs achterwege zullen laten omdat ieder dit gemakkelijk zelf kan vinden.

18. **De lijn, welke de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, is gelijk aan de helft van de derde zijde.**

19. **De hoeken in een halve cirkel zijn onderling gelijk.**

Op grond van het voorafgaande zou men misschien geneigd zijn te denken, dat de stellingen welke men doorgaans met behulp van het parallellenaxioma of daaruit afgeleide stellingen bewezen ziet, zonder uitzondering met het vijfde postulaat aequivalent zijn. Dit nu is niet het geval. Het door één punt gaan van de hoogtelijnen en van de zwaartelijnen van een driehoek bijvoorbeeld wordt bewezen door gebruik te maken van het parallellenaxioma, maar is daarvan niet afhankelijk. Het is daarom wellicht niet van belang ontbloot om, bij wijze van besluit, van de meest bekende stelling uit de planimetrie, nl. die van Pythagoras, op elementaire manier te laten zien, dat ook deze afhankelijk is van het parallellenaxioma, en dus, als laatste, de aequivalentie aan te tonen van dit axioma met

20. In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.

Hulpstelling G. Als in een vierhoek ABCD de hoeken A en B recht zijn en zijde AD groter is dan zijde BC, is $\angle C$ *groter dan* $\angle D$.

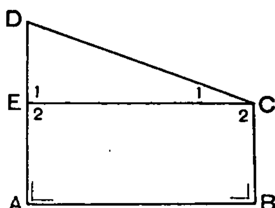


Fig. 22.

Bewijs (fig. 22): Neem $AE = BC$ en trek EC. Volgens hulpstelling A is dan $\angle E_2 = \angle C_2$. Wegens $\angle E_2 > \angle D$ volgt hieruit: $\angle C > \angle D$.

Hulpstelling H. Als in vierhoek ABCD de hoeken A en B recht zijn en $\angle C$ *groter is dan* $\angle D$, *is zijde AD groter dan zijde BC.*
Bewijs: Dit volgt indirect uit de hulpstellingen A en G.

Hulpstelling K. Als in vierhoek ABCD de hoeken A en B recht zijn, volgt uit het niet-gelden van het parallellenaxioma, dat $\angle D$ *kleiner is dan de buitenhoek bij C.*

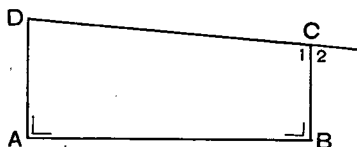


Fig. 23.

Bewijs (fig. 23): Geldt het parallellenaxioma niet, dan is, wegens de aequivalentie van 12, de som der hoeken van vierhoek $ABCD$ kleiner dan 360°. Dus is $\angle D + \angle C_1 < 180°$ en $\angle D < \angle C_2$.

Hulpstelling L. Laat op het ene been van $\angle O$ *de punten A, B en C zodanig gelegen zijn, dat voor de projecties A', B' en C' hiervan op het andere been geldt:* $OA' = A'B' = B'C'$; *uit het niet-geldig zijn van het parallellenaxioma volgen dan de ongelijkheden*
$\frac{OA}{OA'} < \frac{OB}{OB'} < \frac{OC}{OC'}$.

Bewijs (fig. 24): De hoeken A_1 en C_1 zijn scherp. $\angle A_2$ is dus groter dan $\angle C_1$, zodat, volgens hulpstelling H, $CC' > AA'$ is.

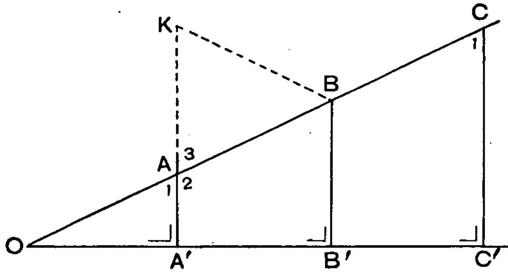


Fig. 24.

Men kan dus op het verlengde van $A'A$ een punt K bepalen, zo dat $A'K = C'C$ is. Uit de congruentie van de vierhoeken $B'C'CB$ en $B'A'KB$ volgt: $BC = BK$ en $\angle C_1 = \angle K$. Volgens hulpstelling K is $\angle C_1 < \angle A_1$. Dus is $\angle K < \angle A_3$, waaruit volgt $AB < KB$ en dus ook $AB < BC$.
Evenzo is $OA < AB$.
Hieruit volgt: $\dfrac{OA}{OA'} < \dfrac{OB}{OB'} < \dfrac{OC}{OC'}$.

Hulpstelling M. Laat op het ene been van $\angle O$ *de punten* A *en* B *zodanig gelegen zijn, dat* $OA < OB$ *is en laat* A' *en* B' *de projecties van* A *en* B *op het andere been zijn; uit het niet-geldig zijn van het parallellenaxioma volgt dan de ongelijkheid* $\dfrac{OA}{OA'} < \dfrac{OB}{OB'}$.

Bewijs: Dit wordt op voor de hand liggende wijze geleverd door toepassing van de vorige hulpstelling.

We bewijzen ten slotte de aequivalentie van 20 met het parallellenaxioma door aan te tonen: geldt het parallellenaxioma niet, dan geldt 20 niet.

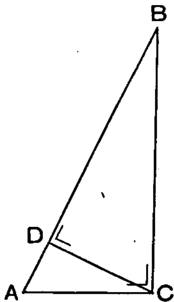


Fig. 25.

Bewijs (fig. 25): Omdat $BC < BA$ is, geldt op grond van hulpstelling M: $\dfrac{BC}{BD} < \dfrac{AB}{BC}$, waaruit volgt $BC^2 < AB\,.\,BD$. Evenzo is $AC^2 < AB\,.\,AD$. Hieruit volgt $AC^2 + BC^2 < AB^2$.

HET ORTHOCENTRISCH VIERVLAK

door

Dr P. G. J. VREDENDUIN

Gewoonlijk noemt men het viervlak het analogon van de driehoek in de driedimensionale ruimte. Dat deze analogie slechts gebrekkig is, is bekend. Eveneens, dat het orthocentrische viervlak ten gevolge van het hebben van een hoogtepunt een sterkere mate van analogie met de driehoek vertoont. Niet algemeen bekend is, dat deze analogie zeer ver doorgevoerd kan worden. In het onderstaande is een opsomming gegeven van eigenschappen van het orthocentrisch viervlak, die overeenkomst vertonen met eigenschappen van de driehoek en niet voor een willekeurig viervlak juist zijn. De meeste bewijzen van de eigenschappen zijn gemakkelijk te vinden en daarom achterwege gelaten.

Notatie. Het orthocentrische viervlak noemen we ABCD.

De tegenover A, B, C, D gelegen zijvlakken noemen we resp. α, β, γ, δ.

O is het middelpunt van de omgeschreven, I dat van de ingeschreven bol, H het hoogtepunt, Z het zwaartepunt. Zijn deze letters van een index α, β, γ of δ voorzien, dan stellen ze het overeenkomstige punt van dat zijvlak voor.

Klassificatie van de orthocentrische viervlakken.

Stelling 1. Gelijke zijvlakken zijn congruent.

Deze stelling beperkt het aantal mogelijke gevallen. We behoeven niet te onderscheiden tussen zijvlakken met gelijke oppervlakte en congruente zijvlakken.

Er zijn dus de volgende vier speciale soorten orthocentrische viervlakken:

a. tweezijdig gelijkvlakkige, waarvan minstens twee zijvlakken congruent zijn,

b. driezijdig gelijkvlakkige, waarvan minstens drie zijvlakken congruent zijn (d.z. regelmatige driezijdige pyramiden),

c. dubbel-tweezijdig gelijkvlakkige, waarvan twee zijvlakken gelijk zijn en de beide andere eveneens,

d. regelmatige, waarvan alle zijvlakken congruent zijn.

Stelling 2. De drie hoeken met hoekpunt A in de zijvlakken, die in A samenkomen, zijn òf alle drie scherp, òf alle drie recht, òf alle drie stomp.

Stelling 3. Als in een hoekpunt de zijvlakshoeken recht of stomp zijn, dan zijn de zijvlakshoeken in de overige drie hoekpunten scherp.

Stelling 4. Als in een hoekpunt de zijvlakshoeken recht of stomp zijn, dan zijn ook de drie standhoeken tussen de zijvlakken, die in dat hoekpunt samenkomen recht resp. stomp. De overige drie standhoeken zijn dan scherp. Als alle zijvlakshoeken scherp zijn, dan zijn ook alle standhoeken scherp.

Overeenkomstig de stellingen 2—4 kunnen we de orthocentrische viervlakken verdelen in:

a. scherphoekige, waarvan alle standhoeken scherp zijn,

b. rechthoekige, waarvan drie standhoeken recht zijn,

c. stomphoekige, waarvan drie standhoeken stomp zijn.

Verband tussen ribben, standhoeken en zijvlakken.

Stelling 5. $AB = AC \leftrightarrows \gamma = \beta$,

$AB > AC \leftrightarrows \gamma > \beta$.

Stelling 6. Indien het viervlak niet rechthoekig in A is, dan geldt

$AB = AC \leftrightarrows$ standhoek op $AC =$ standhoek op AB.

Indien het viervlak scherphoekig in A is (d.w.z. in A scherpe zijvlakshoeken heeft), dan geldt

$AB > AC \leftrightarrows$ standhoek op $AC >$ standhoek op AB.

Indien het viervlak stomphoekig in A is, dan geldt

$AB > AC \leftrightarrows$ standhoek op $AC <$ standhoek op AB.

De analogie met de planimetrie is slechts gebrekkig. (Wil men een betere analogie forceren, dan kan men de scherpe hoeken tussen de zijvlakken i.p.v. de standhoeken beschouwen en in de planimetrie de scherpe hoeken tussen de zijden i.p.v. de hoeken van de driehoek.)

Stellingen over gelijkvlakkigheid.

Stelling 7. Het viervlak is tweezijdig gelijkvlakkig,

a. als twee hoogtelijnen gelijk zijn,

b. als twee zwaartelijnen gelijk zijn,

c. als twee hoogtevlakken, die door eenzelfde hoekpunt gaan, gelijk zijn,

d. als twee zwaartevlakken, die door eenzelfde hoekpunt gaan, gelijk zijn.

(Het is niet nodig de congruentie van de hoogte- resp. zwaartevlakken te onderstellen.)

Bewijs van stelling 7d. Onderstel, dat de zwaartevlakken door AD en CD gelijk zijn. De projecties van deze zwaartevlakken op het hoogtevlak AQC zijn $\triangle$ AKQ en $\triangle$ CLQ (fig. 1*b*). Deze projecties zijn gelijk. De beide zwaartevlakken maken dus gelijke hoeken met vlak ACQ en dus ook met BD.

Door de stelling van Menelaos op $\triangle$ ABQ en $\triangle$ CBQ met transversalen FD resp. ED toe te passen, vinden we $E_1F_1 \parallel EF$ (fig. 1*a*) en dus $E_1F_1 \parallel AC$.

Omdat de zwaartevlakken gelijke hoeken met BD maken, is

$$\text{afstand } (Q, AE_1) = \text{afstand } (Q, CF_1).$$

Omdat $E_1F_1 \parallel AC$, is $\triangle AE_1Q = \triangle CF_1Q$. Dus is $AE_1 = CF_1$. Trapezium ACE_1F_1 is dan gelijkbenig. Hieruit volgt $AQ = CQ$ en dus $\alpha = \gamma$.

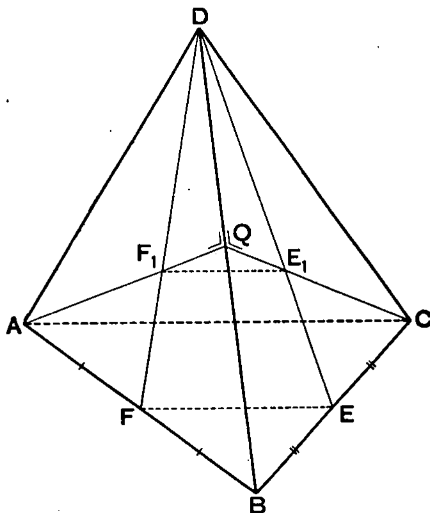


Fig. 1*a*

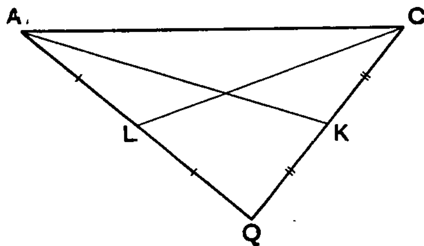


Fig. 1*b*

Stelling 8. Het viervlak is tweezijdig gelijkvlakkig,
a. als O, H of Z in een van de bissectrixvlakken ligt,
b. als O, I of Z in een van de hoogtevlakken ligt,
c. als O, I of H in een van de zwaartevlakken ligt,
d. als I, H of Z in een van de middelloodvlakken ligt.

Bewijs van stelling 8d betreffende I. Onderstel, dat EI′ (zie fig. 2) de ribbe AC snijdt in een punt tussen A en C. Dan is

$$I'G < I'F$$

en dus

standhoek op AC $>$ standhoek op AB.

Hieruit volgt, als het viervlak scherphoekig in A is,

AB $>$ AC,

hetgeen in strijd met de gemaakte onderstelling is. Dus is AB $=$ AC. Is het viervlak niet scherphoekig in A, dan bewijzen we analoog DB $=$ DC.

Fig. 2

Uit stelling 8 volgt:

Stelling 9. Het viervlak is driezijdig gelijkvlakkig,

a. als O, H of Z op een van de bissectrices (snijlijnen van de bissectrixvlakken door eenzelfde hoekpunt) ligt,

b. als O, I of Z op een van de hoogtelijnen ligt,

c. als O, I of H op een van de zwaartelijnen ligt,

d. als I, H of Z op een van de middelloodlijnen (snijlijnen van de middelloodvlakken van ribben van eenzelfde zijvlak) ligt.

Onder een *nevenbissectrix* verstaan we de snijlijn van twee bissectrixvlakken, die door twee overstaande ribben gaan. Analoog definiëren we *nevenhoogtelijnen, nevenzwaartelijnen* en *nevenmiddelloodlijnen.* (De nevenzwaartelijnen zijn dus de verbindingslijnen van de middens van overstaande ribben, de nevenhoogtelijnen de gemeenschappelijke loodsnijlijnen van deze ribben.)

Uit stelling 8 volgt dan verder:

Stelling 10. Het viervlak is dubbbel-tweezijdig gelijkvlakkig,

a. als O, H of Z op een van de nevenbissectrices ligt,

b. als O, I of Z op een van de nevenhoogtelijnen ligt,

c. als O, I of H op een van de nevenzwaartelijnen ligt,

d. als I, H of Z op een van de nevenmiddelloodlijnen ligt.

Stelling 11. Het viervlak is regelmatig, als twee van de punten O, I, H of Z samenvallen.

(Bij een willekeurig viervlak kan men in dit geval slechts tot congruentie van de zijvlakken concluderen.)

Verder geldt nog:

Stelling 12. Het viervlak is driezijdig gelijkvlakkig, als $IZ_\delta \perp \delta$.

Bewijs. Noem de ribben van $\triangle$ ABC a, b, c, de hoogtelijnen in het grondvlak op deze ribben resp. h_a, h_b, h_c en de standhoeken op deze ribben resp. φ, ψ, χ.

Uit $IZ_\delta \perp \delta$ volgt

$$\text{afstand } (Z_\delta, a) \; (:) \; \cot \tfrac{1}{2}\varphi \; ^{1)}$$

en dus

$$h_a \; (:) \; \cot \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$a \; (:) \; \text{tg } \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\sin \alpha \; (:) \; \text{tg } \tfrac{1}{2}\varphi. \qquad (1)$$

Verder is (zie fig. 3)

$$HE \; (:) \; \cot \varphi$$

en dus (omdat $HE = 2R_\delta \cos \beta \cos \gamma$)

$$\cos \alpha \; (:) \; \text{tg } \varphi. \qquad (2)$$

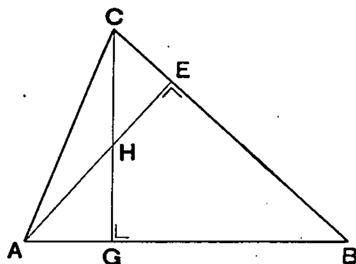


Fig. 3

Als $\triangle$ ABC scherphoekig is en b.v. $\varphi > \psi$, dan zou uit (1) en (2) volgen

$$\sin \alpha > \sin \beta \text{ en } \cos \alpha > \cos \beta.$$

Dit is onmogelijk. Dus is $\alpha = \beta = \gamma$.

Als $\triangle$ ABC niet scherphoekig is en b.v. $\beta \geqq 90°$, dan is $\sin \beta > \sin \alpha$ en $\text{tg } \tfrac{1}{2}\psi < \text{tg } \tfrac{1}{2}\varphi$ (want $\psi < 90°$ en $\varphi \geqq 90°$). Dit is in strijd met (1).

Stelling 13. Het viervlak is tweezijdig gelijkvlakkig, als twee nevenhoogtelijnen gelijk zijn; driezijdig gelijkvlakkig, als de drie nevenhoogtelijnen gelijk zijn.

Enkele lacunes blijven nog. Wat weten we van een viervlak, als twee bissectrices gelijk zijn, als twee bissectrixvlakken gelijk zijn

[1]) d.w.z. afstand (Z_δ, a) : afstand (Z_δ, b) : afstand $(Z_\delta, c) = \cot \tfrac{1}{2}\varphi : \cot \tfrac{1}{2}\psi : \cot \tfrac{1}{2}\chi$.

(stelling 8)? Is het tweezijdig gelijkvlakkig, als twee nevenbissectrices gelijk zijn (stelling 13)? Het behoeft stellig niet tweezijdig gelijkvlakkig te zijn, als twee nevenzwaartelijnen gelijk zijn; dit is altijd het geval.

Stellingen over hoogtelijnen.

Stelling 14. Het hoogtepunt van viervlak ABCH is punt D.

Uit deze stelling volgt, dat elke stelling over orthocentrische viervlakken duaal omgevormd kan worden door D en H te verwisselen, waarbij uiteraard verder overeenkomstige verwisselingen moeten plaats vinden. We noemen deze duale omvorming de *eerste duale omvorming*, en wel t.o.v. D en H. Een soortgelijke duale omvorming treedt in de planimetrie op.

Stelling 15. De vier producten $HH_\alpha \cdot AH$, $HH_\beta \cdot BH$, .. zijn gelijk.

Hieruit volgt:

Stelling 16. De zes punten A, B, C, H_α, H_β, H_γ liggen op één bol.

De snijpunten van de hoogtevlakken door BC met DA, door CA met DB en door AB met DC noemen we resp. P, Q en R. De eerste duale omvorming van stelling 16 t.o.v. D en H is nu:

Stelling 17. De zes punten A, B, C, P, Q, R liggen op één bol.

De stellingen 16 en 17 corresponderen met de planimetrische eigenschap, dat twee hoekpunten van een driehoek met de voetpunten van de hoogtelijnen uit die hoekpunten op één cirkel liggen.

Het ligt voor de hand het viervlak $H_\alpha H_\beta H_\gamma H_\delta$ te beschouwen als het analogon van de voetpuntsdriehoek. Desondanks is dit niet raadzaam, omdat dit viervlak niet orthocentrisch behoeft te zijn.

Met vlak PQR hebben we in dit verband meer succes, gezien de volgende stelling:

Stelling 18. De vlakken ABC en PQR zijn antiparallel t.o.v. de kegel, die D als top en de omgeschreven cirkel van driehoek ABC als richtcirkel heeft.

Bedoeld is hiermee het volgende. Laat een vlak door D de kegel volgens twee beschrijvenden l en m en de vlakken ABC en PQR volgens de rechten p en q snijden. Dan zijn p en q antiparallel t.o.v. l en m.

Verder wordt de kegel niet alleen door vlak ABC, maar ook door vlak PQR volgens een cirkel gesneden.

De analogie blijkt ook nog uit de volgende stelling, die een direct gevolg van stelling 18 is:

Stelling 19. DO staat loodrecht op vlak PQR; DH gaat door het middelpunt van de omgeschreven bol van DPQR.

Rechte van Euler, analogon van de negenpuntscirkel.

Stelling 20. De punten O, H en Z zijn collineair. HZ = ZO. Ook het viervlak heeft dus zijn rechte van Euler.

Stelling 21. Als I in het vlak door D en de rechte van Euler ligt, dan is het viervlak tweezijdig gelijkvlakkig, en wel is $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ of $\gamma = \alpha$.

Bewijs. In fig. 4 is I′ het snijpunt van DI met δ. De standhoeken op de ribben BC, CA, AB noemen we resp. φ, ψ, χ. Nu is

$$H_\delta G \; (:) \; \cot \varphi \text{ [1]}. \qquad (1)$$

Verder is in $\triangle$ ABC

$$\left.\begin{array}{l} H_\delta G = 2R_\delta \cos\beta \cos\gamma \\ O_\delta E = R_\delta \cos\alpha \end{array}\right\} \rightarrow H_\delta G \,.\, O_\delta E = \text{constant},$$

dus

$$O_\delta E \, (:) \; \text{tg} \, \varphi. \qquad (2)$$

Fig. 4

Omdat I′ gelijke afstand tot de vlakken α, β en γ heeft, is

$$I'F \; (:) \; \text{cosec} \, \varphi. \qquad (3)$$

Uit (1), (2) en (3) volgt, dat φ, ψ en χ wortels zijn van een vergelijking

$$\text{cosec} \, x = p \, \text{tg} \, x + q \cot x,$$

waarin p en q constanten zijn [2]. Deze vergelijking herleiden we tot

$$p(1 - \cos^2 x) + q \cos^2 x - \cos x = 0.$$

Omdat deze vergelijking slechts twee wortels heeft voor $\cos x$, zijn minstens twee van de drie hoeken φ, ψ en χ gelijk.

Stelling 22. Als I op de rechte van Euler ligt, dan is het viervlak driezijdig gelijkvlakkig of dubbel-tweezijdig gelijkvlakkig.

---

[1]) D.w.z. de afstanden van H_δ tot BC, CA en AB verhouden zich als $\cot \varphi$, $\cot \psi$ en $\cot \chi$.

[2]) p en q worden bepaald door de drie evenredigheidsconstanten en de verhouding van $H_\delta I'$ en $I'O_\delta$.

Stelling 23. De vier negenpuntscirkels van de zijvlakken van ABCD liggen op één bol.

Deze bol zou men de 24-puntsbol van het viervlak kunnen noemen, daar hij door de 24 merkwaardige punten van de vier negenpuntscirkels gaat. Het ligt voor de hand de 24-puntsbol als analogon te beschouwen van de negenpuntscirkel. Het middelpunt van deze bol is echter het zwaartepunt van het viervlak. Dit doet twijfel ontstaan ten aanzien van de bruikbaarheid van de analogie. Inderdaad blijkt uit de volgende stelling, dat er een duidelijker analogon te vinden is.

Stelling 24. Als we de omgeschreven bol van het viervlak t.o.v. H met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen, dan ontstaat een bol, waarvan het middelpunt op de rechte van Euler ligt. Dezelfde bol ontstaat, als we de omgeschreven bol t.o.v. Z met $-\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen. De bol snijdt de vier zijvlakken volgens cirkels, die $H_\alpha Z_\alpha$, $H_\beta Z_\beta$, ... als middellijn hebben, en gaat verder door de vier punten, die HA, HB, ... in reden 1 : 2 verdelen.

We zullen deze bol de *twaalfpuntsbol* van het viervlak noemen.

Naar analogie van de planimetrie zou men verwachten, dat de twaalfpuntsbol van ABCD tevens twaalfpuntsbol van ABCH, BCDH, CDAH en DABH is. Dit is echter niet juist. Om dit in te zien, vermelden we eerst de volgende stelling.

Stelling 25. Het tweede snijpunt van DH met de omgeschreven bol noemen we D_1. Nu is $H_\delta D_1 = 2HH_\delta$; de punten H_δ en D_1 liggen ter weerszijden van vlak ABC.

Het is deze factor 2, die veroorzaakt, dat in sommige gevallen de analogie met de planimetrie verbroken wordt.

Spiegelen we de omgeschreven bol van ABCD t.o.v. vlak ABC, dan ontstaat nu niet de omgeschreven bol van ABCH. En hierdoor vallen de twaalfpuntsbollen van ABCD en ABCH niet samen. Wel kunnen we de volgende bewerking uitvoeren. We spiegelen D_1 t.o.v. vlak ABC. Het spiegelpunt noemen we H_D. Nu hebben de viervlakken ABCD en $ABCH_D$ congruente omgeschreven bollen en dus congruente twaalfpuntsbollen. Deze snijden vlak ABC volgens dezelfde cirkel en zijn dus identiek of elkaars spiegelbeeld t.o.v. vlak ABC. De twaalfpuntsbollen van ABCD en $ABCD_1$ vallen niet samen, omdat de viervlakken wel dezelfde omgeschreven bol, maar niet hetzelfde hoogtepunt hebben. Deze bollen zijn dus elkaars spiegelbeeld t.o.v. vlak ABC. En dus vallen de twaalfpuntsbollen van ABCD en $ABCH_D$ samen. Hiermee is bewezen:

Stelling 26. De twaalfpuntsbol van ABCD is tevens twaalfpuntsbol van $ABCH_D$, $BCDH_A$, $CDAH_B$ en $DABH_C$.

Passen we dezelfde bewerking, die viervlak $ABCH_D$ uit viervlak ABCD deed ontstaan, op het viervlak $ABCH_D$ toe, dan ontstaat het oorspronkelijke viervlak ABCD. Hier hebben we dus weer een duale omvorming van een viervlak, die het ons mogelijk maakt stellingen te transformeren. We noemen deze omvorming de *tweede duale omvorming*, en wel t.o.v. D en H_D.

Uit de verwisselbaarheid van D en H_D volgt, dat het hoogtepunt van $ABCH_D$ het midden is van DH_δ. Noem dit midden M_D. Dan zien we, dat de twaalfpuntsbol ook gaat door de twaalf punten, die AM_D, BM_D, . . ., DM_D in reden 2 : 1 verdelen. Hiermee is nog een tweede twaalftal merkwaardige punten gevonden. In totaal levert de tweede duale omvorming buiten de aanvankelijkge vonden twaalf merkwaardige punten nog 36 andere, w.o. het zo juist vermelde tweede twaalftal.

Het rechthoekige viervlak.

In de planimetrie heeft de rechthoekige driehoek de eigenschap invariant te zijn t.o.v. de duale omvorming, waarbij het hoekpunt van de rechte hoek en het hoogtepunt verwisseld worden.

In de stereometrie vonden we twee verschillende duale omvormingen. Het viervlak, dat invariant t.o.v. de eerste duale omvorming t.o.v. D en H is, heeft de eigenschap rechthoekig in D te zijn. Voor dit viervlak geldt de stelling:

Stelling 27. Een rechthoeksvlak is middelevenredig tussen het hypotenusavlak en zijn projectie daarop.

Hieruit volgt de stelling van Pythagoras:

Stelling 28. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2$.

Het rechthoekig viervlak heeft echter niet de eigenschap, dat O in het hypotenusavlak ligt. Merkwaardig is in dit verband de volgende stelling:

Stelling 29. Als een viervlak duaal invariant is t.o.v. de tweede duale omvorming t.o.v. D en H_D, dan ligt O in vlak ABC.

Dit is dus het geval, als H samenvalt met M_D (d.i. het midden van de hoogtelijn uit D). Ligt H „boven" M_D (d.w.z. aan dezelfde kant van M_D als D), dan ligt O „onder" vlak ABC; ligt H „onder" M_D, dan ligt O „boven" vlak ABC. De afstanden van H tot M_D en van O tot vlak ABC zijn aan elkaar gelijk. Dit resultaat doet denken aan de planimetrische eigenschap: HC is het dubbele van de afstand van O en AB. Het verschil wordt daardoor veroorzaakt, dat in de planimetrie HZ = 2ZO en in de stereometrie HZ = ZO.

GRAFISCHE BENADERING VAN DE WORTELS VAN VIERKANTSVERGELIJKINGEN

door

dr JOH. H. WANSINK.

1. Aan het grafisch oplossen van vergelijkingen wordt, naar het me toeschijnt, in ons V.H.M.O. weinig aandacht gewijd. Geheel onbegrijpelijk is dit niet. Immers, door grafische oplossing krijgt men slechts benaderde waarden van de gezochte wortels, terwijl van de vergelijkingen die we onze leerlingen plegen voor te zetten, exacte oplossingen mogelijk zijn. Waarom nu, zou men kunnen vragen, zich met benaderingen tevreden te stellen, als er juiste waarden gegeven kunnen worden? De vrees onnauwkeurig werken te bevorderen, brengt ons er allicht toe, grafische oplossingen geheel uit te sluiten; m.i. ten onrechte.

In de toegepaste wiskunde is het veelal niet de juiste waarde van een wortel, maar een decimale benadering ervan, die ons interesseert. En deze benaderingen kunnen bv. bij vierkantsvergelijkingen uit een van te voren samengestelde figuur afgelezen worden in een fractie van de tijd, die nodig zou zijn voor het vinden van de juiste oplossing. Wil men de wortel machinaal tot in een groot aantal decimalen benaderen, dan is het toch nodig van een min of meer ruwe benadering uit te gaan.

Het lijkt me daarom zinvol aan de grafische oplossing van vierkantsvergelijkingen enige aandacht te besteden en wel in de geest van de beschouwingen van dr E. M. BRUINS, in zijn in de Servirereeks uitgegeven boekje over „NUMERIEKE WISKUNDE":

Op blz. 44 lezen we:

> „Vergelijkingen van de vorm $a\varphi(x) + b\psi(x) + 1 = 0$ laten zich graphisch eenvoudig overzien. Voor elke waarde van x bestaat een lineaire betrekking tussen a en b, die in een a-b-figuur door een rechte wordt voorgesteld. Deze rechten, voor verschillende waarden van x, omhullen een kromme, waarvan men de vergelijking verkrijgt door eliminatie van x uit

$$\left.\begin{array}{l} a\varphi(x) + b\psi(x) + 1 = 0 \\ a\varphi'(x) + b\psi'(x) = 0 \end{array}\right\}$$

en die de meetkundige plaats voorstelt van de punten (a, b), waarvoor de vergelijking minstens één meervoudige wortel heeft. Trekt men een voldoend dicht stelsel van dergelijke rechten, dan kan men de reële wortel voor bepaalde waarden (a, b) aflezen bij de rechten, die door het punt (a, b) gaan. Het eenvoudigst is de toepassing bij de quadratische en kubische vergelijkingen."

De bedoeling van dit artikel is slechts om de aandacht te vestigen op deze passage en de betekenis ervan te laten uitkomen in enig oefenmateriaal, dat ook geschikt is voor klassen, waar men van analytische meetkunde niet op de hoogte is, maar enkel de grafieken van de lineaire en de kwadratische functies heeft bestudeerd.

OPMERKING. De methode voor het oplossen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$, welke bestaat in het snijden van een vaste parabool $y = x^2$ met een voor elke vierkantsvergelijking afzonderlijk te tekenen rechte $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$, blijft in dit artikel buiten beschouwing. Ze heeft didactisch m.i. geringere waarde, dan de hier ontwikkelde.

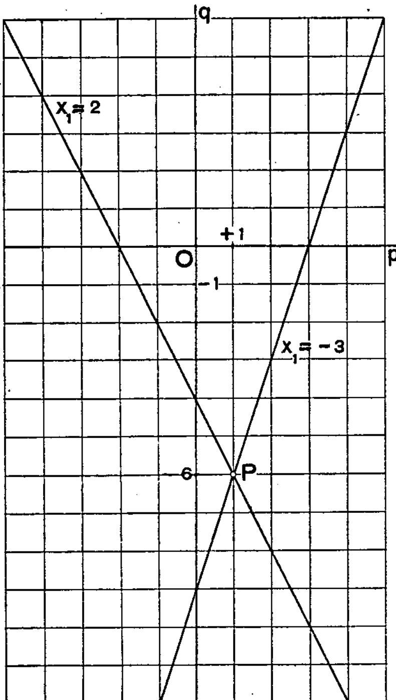


Fig. 1.

2. We beschouwen uitsluitend vierkantsvergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, met reële coëfficienten, die we steeds kunnen herleiden tot de gedaante:

$$\mathbf{x^2 + px + q = 0.}$$

De eerste vraag, die we stellen is:

Welke betrekking bestaat er tussen de coëfficiënten p en q van de vergelijking $x^2 + px + q = 0$, als $x = x_1$ een wortel is?

Het antwoord is:

$$\mathbf{x_1^2 + px_1 + q = 0.}$$

Deze betrekking is lineair in p en q en wordt dus in een p-q-vlak grafisch voorgesteld door een rechte lijn. In fig. 1

zijn deze rechte lijnen getekend voor de waarden $x_1 = +2$ en $x_1 = -3$.

De vergelijkingen van de beide rechte lijnen zijn dus opvolgend $4 + 2p + q = 0$ en $9 - 6p + q = 0$.

We zullen beide rechte lijnen aanduiden als de lijnen $x_1 = +2$ en $x_1 = -3$.

Wat is de betekenis van deze lijnen?

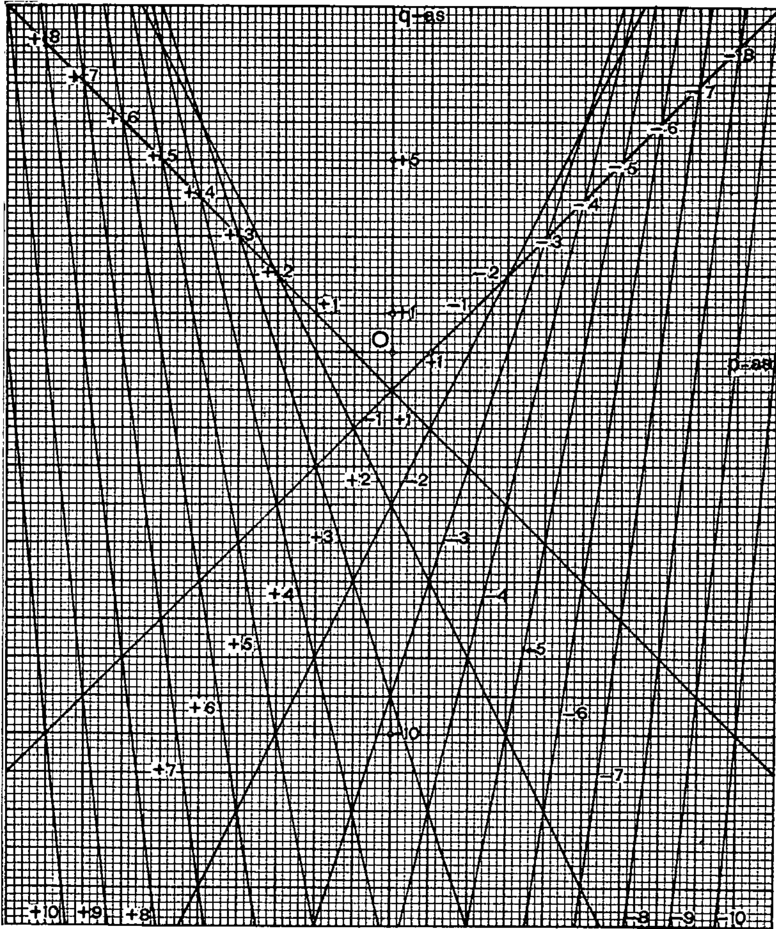


Fig. 2.

Elk punt van de lijn $x_1 = +2$ heeft een stel coördinaten (p, q), die bij substitutie in $x^2 + px + q = 0$ een vierkantsvergelijking doen ontstaan, waarvan $x_1 = +2$ een wortel is.

We kunnen dit kort uitdrukken door de zin:

de rechte lijn is de meetkundige plaats der vergelijkingen, waarvan $x_1 = 2$ een wortel is.

Elk punt van het p-q-vlak stelt dus een vierkantsvergelijking voor; een lijn in het p-q-vlak stelt een verzameling van vierkantsvergelijkingen voor.

In fig. 1 snijden de lijnen $x_1 = +2$ en $x_1 = -3$ elkaar in het punt P $(+1, -6)$.

In verband met het voorafgaande illustreert dit dus, dat de vierkantsvergelijking $x^2 + x - 6 = 0$ tot wortels heeft $+2$ en -3.

3. We beschouwen nu het stelsel rechte lijnen:

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

in het p-q-vlak voor alle reële waarden van x_1.

Van dit stelsel zijn in fig. 2 de exemplaren getekend, die behoren bij alle gehele waarden van x_1, welke voldoen aan $-10 \leqq x \leqq +10$.

Elk van de snijpunten in het beschouwde stelsel stelt een vierkantsvergelijking voor, waarvan de wortels onmiddellijk uit de figuur zijn af te lezen.

Zo stelt het punt $P(-8, -9)$ de vergelijking $x^2 - 8x - 9 = 0$ voor, die tot wortels heeft $+9$ en -1; immers, de lijnen $x_1 = +9$ en $x_1 = -1$ gaan beide door het punt $(-8, -9)$.

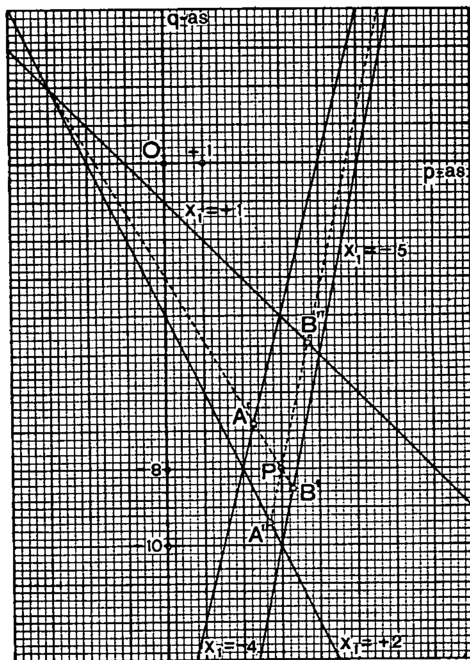


Fig. 3.

4. Ook de punten die niet op de getekende rechte lijnen liggen, stellen vergelijkingen voor, waarvan de eventuele wortels met behulp van de figuur benaderd kunnen worden opgegeven.

Zo stelt het punt (+ 3, —.8) de vergelijking $x^2 + 3x - 8 = 0$ voor. Eén wortel ligt tussen + 2 en — 1; we schatten $x_1 = +1{,}7$. De andere ligt tussen — 4 en — 5; we schatten $x_2 = -4{,}7$.

We kunnen deze schatting zo nauwkeurig mogelijk uitvoeren, als we, althans in gedachten, twee hulplijnen trekken, opvolgend concurrent met telkens twee overstaande zijden van de vierhoek, waarbinnen het punt (+ 3, — 8) ligt.

We vinden (zie fig. 3):

$A'P : PB' \approx 2 : 1$; dus $x_1 \approx -4{,}7$.
$A''P : PB'' \approx 1 : 2$; dus $x_2 \approx +1{,}7$.

De juiste waarden der wortels zijn:

$$\frac{-3 + \sqrt{41}}{2}, \text{ d.i. } -4{,}70 \ldots \text{ en } -1{,}70 \ldots.$$

Terwille van een nauwkeurige schatting is het noodzakelijk de fig. 2 op millimeter-papier op groter schaal over te tekenen!

Verder zien we uit de figuur 2 nog onmiddellijk, dat een vergelijking als $15x^2 - 31x + 49 = 0$ geen wortels heeft, omdat het punt met $p = \frac{31}{15} \approx 2$ en $q = \frac{49}{15} \approx 3$ in een gebied ligt, waardoor geen lijnen van het stelsel gaan.

4. We kunnen nu zonder veel moeite uit fig. 2 de wortels van de volgende vergelijkingen laten aflezen, eventueel benaderd in één decimaal.

$x^2 - 4x - 12 = 0$;	$x^2 - 3x - 3 = 0$;	$2x^2 - 13x - 11 = 0$;
$x^2 - 7x - 8 = 0$;	$x^2 - 1{,}2x - 3{,}7 = 0$;	$3x' - 15x + 4 = 0$;
$2x^2 + 15x - 8 = 0$;	$x^2 - 1{,}5x + 0{,}5 = 0$;	$x^2 - 5x + 1 = 0$;
$2x^2 - 9x - 18 = 0$;	$x^2 + 2x + 4 = 0$;	$x^2 - 6 = 0$.

5. We willen laten zien, dat er op de rechte $x_1 = +3$ één punt ligt, waardoor geen tweede lijn van het stelsel gaat.

De vierkantsvergelijking, die alleen $x_1 = +3$ tot wortel heeft, is $x^2 - 6x + 9 = 0$. Deze vergelijking wordt voorgesteld door het punt (— 6, + 9). Door $p = -6$ en $q = +9$ te substitueren in $9 + 3p + q = 0$, d.i. de vergelijking van de lijn $x_1 = +3$, blijkt, dat het punt (— 6, + 9) op deze lijn ligt.

ALGEMEEN:
op elk der lijnen van het stelsel ligt één punt, waardoor geen tweede lijn van het stelsel gaat.

BEWIJS. De vergelijking van de lijn x_1 is: $x_1^2 + px_1 + q = 0$. De vierkantsvergelijking, waarvan x_1 de enige wortel is, is $x^2 - 2x_1x + x_1^2 = 0$. Ze wordt voorgesteld door het punt $(-2x_1, x_1^2)$, dat op de lijn $x_1^2 + px_1 + q = 0$ ligt, zoals bij substitutie blijkt.

6. **De meetkundige plaats der punten, waardoor slechts één lijn van het stelsel gaat, is de parabool: $q = \frac{1}{4}p^2$.**

Immers, op de lijn x_1 ligt het punt $p = -2x_1$, $q = x_1^2$ waardoor geen tweede lijn van het stelsel gaat.

Eliminatie van x_1 geeft als meetkundige plaats dezer punten $q = \frac{1}{4}p^2$.

Deze parabool is in fig. 2 *niet* getekend; ze wordt echter wel door de figuur gesuggereerd.

7. We weten uit de theorie van de vierkantsvergelijkingen:

a. als de discriminant $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$, heeft de vergelijking geen wortels;
b. als de disciminant $\frac{1}{4}p^2 - q = 0$, heeft de vergelijking één wortel;
c. als de discriminant $\frac{1}{4}p^2 - q > 0$, heeft de vergelijking twee wortels.

In overeenstemming hiermee geldt:

a. door alle punten van het p-q-vlak met $q > \frac{1}{4}p^2$ (d.i. door alle punten van het binnengebied van de parabool $q = \frac{1}{4}p^2$) gaan geen lijnen van het stelsel;
b. door alle punten met $q = \frac{1}{4}p^2$ (d.z. door alle punten van die parabool) gaat één lijn van het stelsel;
c. door alle punten met $q < \frac{1}{4}p^2$ (d.i. door alle punten van het buitengebied van die parabool) gaan twee lijnen van het stelsel.

OPMERKINGEN. 1. Men noemt de parabool $q = \frac{1}{4}p^2$, waaraan alle rechten van het beschouwde stelsel raken, de *omhulde* van dit stelsel. We „zien" deze omhulde in de figuur, zodra er een voldoend aantal rechten is getrokken, zonder de kromme zelf te trekken.

2. In fig. 4 is de kromme $q = \frac{1}{4}p^2$ getekend en gesneden door een rechte, waarop p constant is.

In het snijpunt S is $q = \frac{1}{4}p^2$.
Laat men q groeien bij constante p, dan wordt $q > \frac{1}{4}p^2$ (binnengebied parabool) laat men q kleiner worden bij constante p, dan wordt $q < \frac{1}{4}p^2$ (buitengebied parabool).

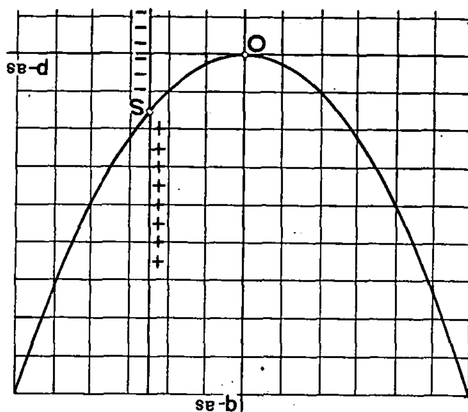


Fig. 4.

8. We willen de bespreking van dit stelsel rechte lijnen besluiten met het signaleren van enkele opvallende eenvoudige eigenschappen van de op blz. 279 opgenomen figuur 2.

a. De lijnen die behoren bij *gehele* waarden van x snijden elkaar in *roosterpunten* van het vlak; immers, het snijpunt der lijnen x_1 en x_2 heeft tot coördinaten $-x_1-x_2$ en $+x_1x_2$, dat zijn gehele getallen.

b. Op een willekeurige rechte x_1 van het stelsel worden door de rechten x_2, x_3 en x_4 segmenten P_2P_3 en P_3P_4 bepaald, waarvoor geldt:

$$P_2P_3 : P_3P_4 = |x_2 - x_3| : |x_3 - x_4|.$$

Immers, P_2P_3 en P_3P_4 verhouden zich als hun projecties op de p-as. Nu hebben de projecties van P_2, P_3 en P_4 op de p-as volgens eigenschap *a* tot coördinaten $-x_1-x_2$, $-x_1-x_3$ en $-x_1-x_4$, zodat de lengten van de projecties van P_2P_3 en P_3P_4 op de x-as opvolgend zijn:

$$|(-x_1-x_2)-(-x_1-x_3)| = |x_3-x_2| \text{ en } |(-x_1-x_3)-(-x_1-x_4)| = |x_4-x_3|,$$

waaruit de juistheid van de eigenschap volgt.

Gevolg. In figuur 2 worden op elke rechte, die bij een gehele waarde van x behoort, door de overige rechten, die bij opvolgende gehele waarden van x behoren, gelijke stukken bepaald.

c. De lijnen, die in fig 2. bij gehele waarden van x behoren, bepalen in het p-q-vlak een stelsel van vierhoeken en driehoeken, waarvan de oppervlakten door gehele getallen worden voorgesteld.

We beschouwen de vierhoek waarvan de zijden vallen langs de rechten x_1, $x_1 + 1$, x_2 en $x_2 + 1$. De diagonaal SQ (zie fig. 5) is evenwijdig aan de q-as; immers, de p-coördinaten van S en Q zijn even groot, n.l. $-x_1 - (x_2 + 1)$ en $-x_2 - (x_1 + 1)$.

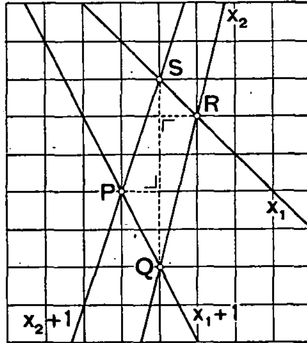


Fig. 5.

De som der loodlijnen uit P en R op SQ neergelaten is gelijk aan het verschil der p-coördinaten van P en R, d.i. gelijk aan het verschil van $-(x_1 + 1) - (x_2 + 1)$ en $-(x_1 + x_2)$, d.i. 2. De lengte van SQ is het verschil van de q-coördinaten van S en Q,

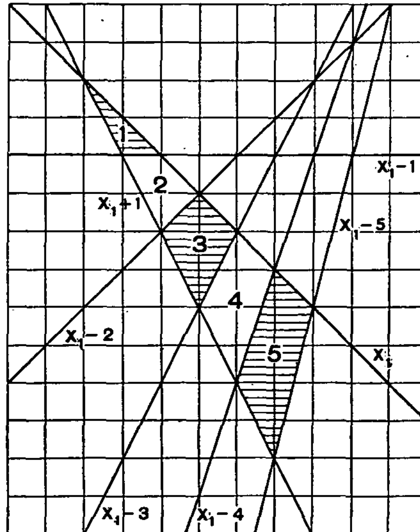


Fig. 6.

d.i. van $x_1(x_2 + 1)$ en $x_2(x_1 + 1)$, dus $| x_1 - x_2 |$. De oppervlakte van vierhoek $PQRS$ is dus $| x_1 - x_2 |$, d.i. een geheel getal.

GEVOLG. Voor de oppervlakten van de delen, waarin het hoekgebied van de scherpe hoek tussen de rechten x_1 en $x_1 + 1$ verdeeld wordt door de rechten $x_1 - 1, x_2 - 2, x_1 - 3, \ldots$ vindt men opvolgend: 1, 2, 3, 4, 5, . . .; zie fig. 6.

9. Indien we het elementaire standpunt, dat we in dit artikel hebben ingenomen, voor een ogenblik verlaten, blijkt het heel eenvoudig de vergelijking van de parabool, die we als omhulde van het beschouwde stelsel rechte lijnen vonden, zowel in punt- als in lijncoördinaten te geven.

a. *In puntencoördinaten* (p, q).

De omhulde wordt gevonden door eliminatie van de parameter x_1 uit

$$x_1^2 + px_1 + q = 0$$

en de vergelijking die we vinden door differentiatie naar x_1

$$2x_1 + p = 0.$$

We vinden:

$$\mathbf{q = \tfrac{1}{4}p^2.}$$

b. *In homogene lijncoördinaten* (u, v, w).

Deze coördinaten zijn voor een willekeurige lijn van het stelsel $(x_1, 1, x_1^2)$.

Hieruit volgt onmiddellijk $\frac{w}{u} = \frac{u}{v}$, zodat de tangentiële vergelijking van de omhulde is

$$\mathbf{u^2 = v \cdot w.}$$

Deze kromme is van de *tweede klasse*; door elk punt van het vlak gaan twee (reële of niet-reële) lijnen van het stelsel (raaklijnen van de omhulde).

De bedoeling van bovenstaand artikel was echter slechts de theorie te geven in een vorm die zich leent voor gebruik in de klasse. In verband hiermee hebben we ons ook in de voorafgaande paragrafen beperkt tot het stelsel der reële getallen.

HET GELIJKTEKEN

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN.

1. In de algebra-leerboeken treffen we naast elkaar verschillende tekens aan, waarvan de betekenis verwant is met die van de relatie „is gelijk aan". We hebben het oog op de schrijfwijzen:

a. $f(x) \doteq g(x)$, waarmee bedoeld wordt: los x op uit de vergelijking $f(x) = g(x)$,

b. $(fx) \equiv g(x)$, waarmee bedoeld wordt: de functies $f(x)$ en $g(x)$ zijn identiek.

Het doel van dit artikel is:

1. te onderzoeken, waarin het onderscheid tussen de betekenis van de symbolen $=$, $\doteq$ en $\equiv$ bestaat,

2. de vraag te beantwoorden, of deze drie symbolen voldoende zijn voor het onderscheiden van de verschillende voorkomende gevallen.

2. *Het oplossen van vergelijkingen.*

Het is noodzakelijk ons er te voren rekenschap van te geven, wat onder het oplossen van een vergelijking verstaan wordt. We beperken ons tot één vergelijking met één onbekende, waarin geen andere variabelen voorkomen dan de onbekende.

Voorbeeld 1. $x^2 - 7x = -12$.

Gevraagd wordt alle waarden van x te vinden, die aan deze vergelijking voldoen. Een juist antwoord op deze vraag is: alle waarden, die aan $x^2 - 7x + 12 = 0$ voldoen. Het is duidelijk, dat we met dit antwoord geen genoegen nemen. Het antwoord moet luiden: $x = 3$ of $x = 4$. We eisen dus, dat het antwoord geschreven wordt in een bepaalde standaardvorm, nl. in de vorm

$$x = a_1 \text{ of } x = a_2 \text{ of } \ldots x = a_n.$$

In ons geval is dan $n = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$.

Voorbeeld 2. $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ (op te lossen in het reële getalstelsel). De oplossing luidt: $x > 0$ of $x = 0$.

Voorbeeld 3. $\frac{\sqrt{x}}{x - 2} = \frac{\sqrt{x}}{x - 2}$ (op te lossen in het reële getalstelsel). De oplossing luidt: ($x > 0$ of $x = 0$) en $x \neq 2$. [1])

Uit deze voorbeelden zien we, dat de *standaardvorm*, waarin men de oplossing wenst te geven, bestaat uit *een samenstel van conjuncties en (of) disjuncties van leden van de vorm* $x = a$, $x > a$, $x < a$ *of* $x \neq a$. (Desgewenst kan hierin "$x \neq a$" nog door "$x > a$ of $x < a$" vervangen worden.) Voor onze schoolalgebra is deze standaardvorm afdoende.

Het oplossen van een vergelijking betekent dus het vinden van een standaardvorm, die met de gegeven vergelijking gelijkwaardig is.

Anders gezegd: de oplossing van de vergelijking $f(x) = g(x)$ is een standaardvorm $S(x)$ betekent: voor elke x volgt uit $f(x) = g(x)$, dat ook $S(x)$, en uit $S(x)$, dat ook $f(x) = g(x)$.

We schrijven dit korter: voor elke x geldt:

$$f(x) = g(x) \rightleftarrows S(x).$$

Toelichting. De oplossing van de vergelijking

$$x^2 - 7x = -12$$

is de standaardvorm

$$x = 3 \text{ of } x = 4.$$

Dit betekent:

1. als een of ander getal x de eigenschap heeft, dat $x^2 - 7x = -12$, dan is $x = 3$ of $x = 4$,

2. als een of ander getal x de eigenschap heeft, dat $x = 3$ of $x = 4$, dan is $x^2 - 7x = -12$.

Dus:

hoe we x ook kiezen: als $x^2 - 7x = -12$, dan is $x = 3$ of $x = 4$, en omgekeerd.

Of:

voor elke x geldt: $x^2 - 7x = -12 \rightleftarrows x = 3$ of $x = 4$.

3. *De relatie* $=$.

De gelijkheidsrelatie in de algebra is een bijzonder geval van de logische relatie „is identiek met" („is hetzelfde als"). Zo betekent „$3 + 4 = 7$", dat volgens de definitie van optellen de betekenis van „$3 + 4$" het getal 7 is.

Met „$a = 5$" wordt dus bedoeld, dat a het getal 5 voorstelt. En met „$a = b$", dat a en b hetzelfde getal voorstellen.

[1]) De haakjes geven aan, dat eerst $x > 0$ met $x = 0$ gedisjugeerd moet worden en daarna het resultaat geconjugeerd met $x \neq 2$.

4. *De relatie* $\doteq$.

Dit teken wordt gebruikt om aan te duiden, dat we met een vergelijking te maken hebben. Bv. $x^2 - 7x = -12$. Het teken $\doteq$ wijst er op, dat niet beweerd wordt, dat x een zodanige waarde heeft, dat $x^2 - 7x$ de waarde -12 aanneemt, maar dat gevraagd wordt elke zodanige waarde te vinden.

De oplossing luidt nu:

$$x^2 - 7x \doteq -12$$
$$x^2 - 7x + 12 \doteq 0$$
$$(x-3)(x-4) \doteq 4$$
$$x \doteq 3 \text{ of } x \doteq 4$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = 4.$$

Om hierin de functie van het teken $\doteq$ te leren doorzien, moeten we trachten deze oplossing opnieuw te redigeren en daarbij het gebruik van het teken $\doteq$ op een toelaatbare wijze door dat van het teken $=$ te vervangen. We kunnen dit als volgt doen.

Voor elke x geldt: $x^2 - 7x = -12 \rightleftarrows x^2 - 7x + 12 = 0$,
voor elke x geldt: $x^2 - 7x + 12 = 0 \rightleftarrows (x-3)(x-4) = 0$,
voor elke x geldt: $(x-3)(x-4) = 0 \rightleftarrows x = 3$ of $x = 4$.

En dit is een standaardvorm.

De logische functie van het teken $\doteq$ is hiermee aan het licht gebracht. Als we onder elkaar schrijven

$$x^2 - 7x \doteq -12$$
$$x^2 - 7x + 12 \doteq 0,$$

dan bedoelen we:
voor elke x geldt: $x^2 - 7x = -12 \rightleftarrows x^2 - 7x + 12 = 0$.

Opmerking. Het vervangen van „$x \doteq 3$ of $x \doteq 4$" door „$x_1 = 3$, $x_2 = 4$" kan verantwoord worden door een passende afspraak. Moeilijker wordt het, als de vergelijking slechts één wortel heeft. B.v.

$$3x + 1 = x + 5$$
$$2x = 4$$
$$x = 2.$$

Mogen we hier als antwoord opgeven „$x = 2$"? Dat zou betekenen: x stelt het getal 2 voor. Dit is stellig niet juist. De variabele x mocht immers elk getal voorstellen, anders was het geen variabele. Wil men consequent zijn, dan moet men dus als antwoord opgeven „$x \doteq 2$" (of, als men wil, $x_1 = 2$).

5. *De relatie* $\equiv$.

De situatie is hier eenvoudig.

$$(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$$

betekent

voor elke x geldt $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

De voorstanders van het gebruik van dit teken gaan nimmer consequent te werk. Zij zouden het teken $\equiv$ feitelijk overal dienen te gebruiken, waar herleidingen van algebraische vormen uitgevoerd worden. Dus b.v. overal in het gedeelte van de algebra, dat voorafgaat aan de theorie van de lineaire vergelijkingen.

6. Resumerend kunnen we vaststellen:

a. $f(x) = g(x)$ betekent:
$f(x)$ en $g(x)$ stellen hetzelfde getal voor.
D.w.z. we denken ons het getal x zo gekozen, dat $f(x)$ en $g(x)$ hetzelfde getal voorstellen. (Dit gebruik van het gelijkteken komt weinig voor.)

b. $\left.\begin{array}{l} f(x) \doteq g(x) \\ f_1(x) \doteq g_1(x) \end{array}\right\}$ betekent:

voor elke x geldt: $f(x) = g(x) \rightleftarrows f_1(x) = g_1(x)$.

c. $f(x) \equiv g(x)$ betekent:
voor elke x geldt $f(x) = g(x)$.

Er is dus slechts één relatie „is gelijk aan". Het gebruik van de tekens $\doteq$ *en* $\equiv$ *dient alleen om de wijze aan te duiden, waarop het gelden van de gelijkheidsrelatie wordt beweerd als onderdeel van het voor elke x gelden van een bepaalde uitspraak.*

7. Thans willen we de tweede vraag trachten te beantwoorden. Zijn de drie besproken symbolen voldoende voor het maken van de nodige onderscheidingen in alle voorkomende gevallen? Aan de hand van twee *eenvoudige* voorbeelden willen we laten zien, dat het daar reeds niet het geval is.

Voorbeeld 1. Voor welke waarde van a is

$$ax + 4 = 2x + a^2$$

een identiteit in x?

Oplossing. We hebben hier te maken met een identiteit in x en niet in a. Om dit aan te duiden zouden we van een identiteits-

teken gebruik moeten maken, dat betrokken is op een bepaalde variabele. We kunnen hiervoor het teken $\equiv_x$ kiezen. Verder moet uit deze identiteit a opgelost worden en niet x. We zijn dus genoodzaakt een teken $\doteq_a$ in te voeren. Nu kunnen we de oplossing als volgt schrijven.

$$ax + 4 \doteq_a \equiv_x 2x + a^2 \qquad (1)$$
$$a \doteq 2 \text{ en } 4 \doteq a^2 \qquad (2)$$
$$a \doteq 2.$$

(1) en (2) zijn dan te lezen:

voor elke a geldt: „voor elke x geldt $ax + 4 = 2x + a^2$" $\rightleftarrows$ „$a = 2$ en $4 = a^2$".

Voorbeeld 2. Los x op uit de vergelijking $x + a = 1$.

Oplossing. We realiseren ons eerst, wat er eigenlijk gevraagd wordt. Er moet een functie van a, $f(a)$, gevonden worden met de eigenschap, dat voor elke a „$x = f(a)$" gelijkwaardig is met „$x + a = 1$". Weer is er een onbekende, nl x, en moet er voor zorg gedragen worden, dat een identiteit ontstaat, nl een identiteit in a. Het probleem schijnt dus een herhaling van het vorige (met verwisseling van a en x). We proberen de oplossing op dezelfde manier te geven.

$$x + a \doteq_x \equiv_a 1$$
$$x \doteq_x 1 - a.$$

De interpretatie hiervan is echter (vgl. voorbeeld 1):

voor elke x geldt: „voor elke a geldt $x + a = 1$" $\rightleftarrows$ „$x = 1 - a$". (1)

Deze interpretatie stemt niet overeen met de bedoeling van de oplossing. Het oordeel „voor elke a geldt $x + a = 1$" is namelijk gelijkwaardig met het oordeel, voor elke b geldt $x + b = 1$". Dus is (1) gelijkwaardig met:

voor elke x geldt: „voor elke b geldt $x + b = 1$" $\rightleftarrows$ „$x = 1 - a$". En dit is niet eens een juist oordeel.

Onze bedoeling met de oplossing was een andere. We wilden tot uitdrukking brengen, dat

voor elke a geldt: „voor elke x geldt: $x + a = 1 \rightleftarrows x = 1 - a$". [1])

Men zou, om dit te bereiken, nog een verwisseling van de tekens $\doteq_x$ en $\equiv_a$ kunnen voorslaan. Ik prefereer echter de pogingen op te geven.

[1]) Het essentiële verschil tussen de voorbeelden 1 en 2 is uiteraard, dat in 1 gevraagd wordt een *getal* als oplossing voor a te vinden en in 2 een *functie* van a als oplossing voor x. Onze symbolen schieten echter te kort om dit verschil tot uitdrukking te brengen.

8. *Conclusie.*

Een consequent gebruik van de tekens $\doteq$ en $\equiv$, dat logisch verantwoord is, leidt reeds in eenvoudige gevallen tot ongewenste complicaties. Het verdient dan ook aanbeveling zich in alle gevallen te beperken tot het gebruik van het symbool $=$. Hetzelfde geldt m.m. voor de ongelijkheidstekens.

Of het gebruik van $\doteq$ of $\equiv$ soms didactische voordelen biedt, waag ik te betwijfelen. Persoonlijk heb ik alleen ervaring met het teken $\equiv$, dat ook in het algebraboek van Vredenduin en Van Haselen gebruikt wordt. De leerlingen hebben steeds een sterke neiging dit teken door $=$ te vervangen en komen daarbij nimmer in moeilijkheden.

KORREL CIX.

GETIJDE-KRACHTEN.

1. Vermoedelijk zal het verschijnsel der getijden dit jaar o.a. op aardrijkskundelessen, geschiedenislessen, natuurkundelessen, cosmographielessen en mechanicalessen veelvuldiger en diepgaander aan de orde zijn gesteld dan in andere jaren.

Het onderwerp zou zich m.i. uitstekend lenen tot een „project". Ik heb de indruk, dat men zich bij de bespreking van eb en vloed soms te gemakkelijk beperkt tot in hoofdzaak kwalitatieve beschouwingen. Zo bestaat de mogelijkheid, dat verificatie van de verhouding van de getijde-krachten veroorzaakt door zon en maan die men opgegeven vindt ($\frac{2}{5}$ of $\frac{3}{7}$ of $\frac{5}{11}$), zonder voldoende grond achterwege wordt gelaten.

Eén der wegen langs welke de bedoelde verificatie in de klasse kan plaats hebben, wil ik hier aangeven, met de bedoeling aan een overigens bekend aspect van het probleem enig relief te geven.

2.*a*. De getijde-krachten die op aarde door een hemellichaam worden veroorzaakt, zijn omgekeerd evenredig met de derde machten van de afstanden tot die hemellichamen en recht evenredig met de massa's ervan.

Uit Newton's gravitatiewet

$$K = f\frac{Mm}{d^2}$$

volgt immers: $$\Delta K \approx -f\frac{2Mm}{d^3}\Delta d,$$

d.i. als we Δd door r (straal van de aarde) vervangen:

$$\Delta K \approx -f\frac{2Mmr}{d^3}.$$

b. Uit de gelijkheid van de schijnbare middellijnen van de zon ($2R$) en de maan (2ϱ) vindt men meetkundig gemakkelijk voor de verhouding van de afstanden D en d van zon en maan tot de aarde:

$$D : d = R : \rho.$$

De grootte k van deze verhouding, welke in ruwe benadering 400 bedraagt, kan verder buiten beschouwing blijven.

c. De verhouding van de getijde-krachten veroorzaakt door de zon en de maan is bij benadering gelijk aan de verhouding van de soortelijke massa's van zon en maan, d.i. als 1,4 : 3,3.

Immers:

$$\frac{\Delta K_{zon}}{\Delta K_{maan}} = \frac{d^3}{D^3} \cdot \frac{R^3}{\varrho^3} \cdot \frac{\text{soortelijke massa zon}}{\text{soortelijke massa maan}}$$

$$= \frac{1}{k^3} \cdot k^3 \cdot \frac{1,4}{3,3}$$

$$= \frac{14}{33} \left(\approx \frac{3}{7} \right).$$

d. De getijde-krachten zijn zwak in vergelijking tot de zwaartekracht op aarde. Zo is de maximale getijde-kracht, die aan de maan moet worden toegeschreven, bij benadering slechts $\frac{1}{9\,000\,000}$ deel van de zwaartekracht op aarde.

Beschouwen we n.l. de getijde-kracht van de maan, werkend op een massa van m eenheden aan het aardoppervlak, dan vinden we voor de getijde-kracht:

$$\Delta K = \frac{2f \cdot m_{maan} \cdot m}{\varrho^3} \cdot r$$

en voor het gewicht:

$$G = \frac{f \cdot m_{aarde} \cdot m}{r^2}.$$

Dus is:

$$\frac{\Delta K}{G} = 2 \cdot \frac{m_{maan}}{m_{aarde}} \cdot \frac{r^3}{\varrho^3} = \frac{2}{81} \cdot \frac{1}{60^3} \approx \frac{1}{8,7 \cdot 10^6}.$$

e. Het begrip getijde-kracht en de vereenvoudigende factoren, die in bovenstaande afleidingen een rol spelen, vereisen uiteraard in de les nader commentaar. Ook lijkt het me gewenst, erop te letten, dat het begrip „totale massa" van de zon en van de maan physisch primair is t.o.v. het begrip „soortelijke massa", dat in de afleidingen voorkomt.

In een volgende korrel hoop ik met elementaire middelen een bruikbare schatting te kunnen geven voor het verschil in hoogte van eb en vloed (in open zee).

WANSINK.

RAPPORT BETREFFENDE HET WISKUNDE-ONDERWIJS AAN DE H.B.S.-A [1]

De commissie door het bestuur van WIMECOS aangezocht om het wiskunde-onderwijs aan de H.B.S.-A te bespreken en daarover rapport uit te brengen bestond uit de heren:
Drs H. Pleysier, docent aan de Nederl. Economische Hogeschool en docent bij het Gemeentelijk M.O. te Rotterdam, voorzitter;
Dr H. A. Gribnau, rector van het St. Norbertus Lyceum te Roosendaal;
Dr P. J. A. M. Kouwenhoven, directeur van de 1e R.K. H.B.S.-A en B te Rotterdam;
A. J. Dunnebier, leraar aan de Lorentz-H.B.S. te Arnhem; rapporteur.

De commissie vergaderde éénmaal; ze meende zich in haar besprekingen te moeten beperken, teneinde practische verwezenlijking van haar wensen op korte termijn mogelijk te maken.

Zo werd, gezien de wettelijke gelijkschakeling der eerste drie leerjaren van de H.B.S.-A en B, niet onderzocht, of verandering van het program in die klassen voor de H.B.S.-A wenselijk is, waarbij dan in het bijzonder overwogen had kunnen worden, in hoeverre beperking der meetkunde wenselijk is.

Evenmin werd in de bespreking betrokken de wenselijkheid van uitbreiding of verandering der leerstof, als de cursus t.z.t. zesjarig mocht worden.

De commissie meende te moeten vaststellen, dat de tegenwoordige toestand, waarbij alleen in de 4e klasse één uur Wiskunde wordt gegeven, niet bevredigend is.

Tot en met de cursus 1943—1944 werd in de 4e en in de 5e klasse één uur Wiskunde gegeven.
De omschrijving van de leerstof voor deze beide klassen tezamen:

> „Herhaling van de leerstof der derde klasse. Financiële rekenkunde. Grafische voorstellingen".

was vrij summier, maar liet in de toegemeten tijd de mogelijkheid om de gebruikelijke onderwerpen der samengestelde intrestrekening te behandelen, daaronder begrepen de rentabiliteitsberekeningen.

Toen in de cursus 1944—'45 de tot heden gehandhaafde toestand

[1]) Dit rapport is op de Algemene Vergadering van *Wimecos* van 5 Januari 1953 te Amsterdam in bespreking gebracht en door de vergadering aanvaard.

ontstond, dat slechts in de 4e klasse Wiskunde werd gegeven, was het niet lager mogelijk aan bovenstaand programma te voldoen.

Het komt de commissie voor, dat een eerste en minimale eis is, dat het Wiskunde-onderwijs aan de H.B.S.-A weer wordt gegeven in de 4e en in de 5e klasse en wel in beide gedurende één uur per week.

De commissie grondt haar mening op de volgende feiten. De moderne economie heeft een meer wiskundig karakter dan de vroegere. Vele economische werken zijn niet te lezen zonder een behoorlijke kennis van de elementaire algebra, zonder enige kennis van meetkundige eigenschappen vooral op het gebied der gelijkvormigheid en zonder enige kennis van grafische voorstellingen. Dit komt ook uit in de eisen, die tegenwoordig aan de Economische Hogescholen en Faculteiten worden gesteld bij het wiskundig deel van het propaedeutisch examen, terwijl ook het Nederlands Instituut van Accountants in zijn opleiding het vak Voortgezette Wiskunde (tegenwoordig Wiskunde genoemd) heeft opgenomen.

Het is naar het oordeel der commissie ernstig, dat het de abituriënten der H.B.S.-A vaak ontbreekt aan de nodige kennis van het werken met algebraische vormen, dat zij er geen begrip van hebben wat een functie is en dat de kennis van reeksen en logarithmen gebrekkig is, doordat zij in meer dan een jaar er niet mee gewerkt hebben.

Deze tekortkomingen blijken ook bij de opleidingen voor de examens, Gemeentefinanciën, Staatspractijkdiploma voor Bedrijfsadministratie en Handelswetenschappen M.O., waarvoor de H.B.S.-A toch zeker mede de geeigende vooropleiding behoort te zijn. Naar het oordeel der commissie blijken bij deze opleidingen de bezitters van een M.U.L.O. diploma-B een voorsprong op wiskundig gebied te hebben op de H.B.S.-A gediplomeerden, hoezeer deze laatsten in algemene ontwikkeling hun meerderen zijn. Het is te verwachten, dat ook bij de studie voor M.O.-Economie wiskundige kennis meer en meer van betekenis zal zijn.

Maar niet in het minst voor het grote getal dergenen, die hun studie niet verder voortzetten is het van belang, dat hun wiskundige kennis als onderdeel van hun algemene ontwikkeling niet te gering zij. Het lezen van een dagblad, waarvan de financiële rubriek niet de minst belangrijke is, is niet mogelijk zonder enig begrip van rentabiliteitsberekening, emissiekoersen, aflossings- en afschrijvingsmethoden en grafische voorstellingen.

Wordt het uur in de vijfde klasse hersteld, dan lijkt het de commissie mogelijk, in het raam van de bovenvermelde omschrijving

der leerstof, bevredigend onderwijs te geven voor de verschillende categorieën der eindexamencandidaten.

Behandeling der rentabiliteitsberekeningen lijkt de commissie daarbij van essentiëel belang; het functiebegrip kan hierbij en ook bij de behandeling van de intrestfuncties voldoende tot zijn recht komen.

De commissie meent daarbij het gebruik van symbolen te moeten ontraden, daar zij niet bijdragen tot het inzicht doch meer van rekentechnisch belang zijn.

Wat de grafieken betreft, meent de commissie, dat er naar gestreefd moet worden, deze te behandelen in verband met het functiebegrip en met economische verschijnselen. Het tekenen van allerlei empirische en beeldstatistieken lijkt van minder belang.

Arnhem, 27 December 1952. A. J. DUNNEBIER.

DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

Rectificatie.

Dr D. J. E. SCHREK (Utrecht) wijst me op een onjuistheid op blz. 198 van de 28ste jaargang van EUCLIDES.

De Nederlandse spreker op het Congres te Nice (1932) was *niet* de latere minister G. VAN DER LEEUW, maar de heer J. J. VAN DER LEEUW. Het door hem gesprokene is te vinden in *The New Era,* 13, 1932, blz. 288—289.

WANSINK.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

28e JAARGANG 1952/53

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

INHOUD VAN DE 28e JAARGANG, 1952-1953

OFFICIEEL

LIWENAGEL. Blz.

WIMECOS

ARTIKELEN

KORRELS.